

المعاهم

فى
الرياضيات البحتة



تأ
ماهر أحد

تابعنا تيليجرام

<https://t.me/ic33m>

يطلب من دار النشر
الدعم الفني : ٥٠٠١٣
والإقتراحات : ٥٣٠
هاتف : ١٣٠٠

NATH@Yahoo.com
أوعلى صفحتنا

محتويات الكتاب

أولاً : الجبر

الوحدة الأولى :

٥	الدرس (١) : المتغيرات والعمليات
٢٤	الدرس (٢) : المعادلات الخطية
٤٧	الدرس (٣) : الأعداد الحقيقية
٥١	الدرس (٤) : المتطابقات
٧٢	الدرس (٥) : المعادلات التربيعية
٨٧	الدرس (٦) : الدوال التربيعية
٩٩	الدرس (٧) : المتطابقات التربيعية

الوحدة الثانية :

١١٩	الدرس (٨) : المحدد
١٢٩	الدرس (٩) : المقادير
١٤٧	الدرس (١٠) : النهايات

ثانياً : التفاضل

الوحدة الثالثة :

١٦٧	الدرس (١١) : معدل التغير
١٧٨	الدرس (١٢) : المشتقات
١٩٩	الدرس (١٣) : قواعد الاشتقاق
٢٥٧	الدرس (١٤) : مشتقة دالة لحد (قاعدة التبسيط)
٢٢٦	الدرس (١٥) : مشتقات الدوال المثلثية
٢٤١	الدرس (١٦) : تطبيقات على المشتقات
٢٥٨	الدرس (١٧) : التكامل

ثالثاً : حساب المثلثات

الوحدة الرابعة :

٢٨٠	الدرس (١٨) : الزوايا المرفوعة والمنخفضة
٢٩٥	الدرس (١٩) : الدوال المثلثية لمدى معين
٣١٨	الدرس (٢٠) : الدوال المثلثية لمدى معين
٣٤٢	الدرس (٢١) : صيغة هرمان

أولاً : الجبر

الوحدة الأولى :

- الدرس ① : المتغيرات والمتسلسلات .
- الدرس ② : المتكافئة الحسابية .
- الدرس ③ : الأوساط الحسابية .
- الدرس ④ : المتسلسلات الحسابية .
- الدرس ⑤ : المتكافئة الهندسية .
- الدرس ⑥ : الأوساط الهندسية .
- الدرس ⑦ : المتسلسلات الهندسية .

الوحدة الثانية :

- الدرس ① : مبدأ القيد .
- الدرس ② : القيد الجبري .
- الدرس ③ : التوافيق .





المتتابعات والمتسلسلات

الدروس

١

درسنا في السنوات السابقة بعض الأنماط العددية مثل النمط ٢، ٤، ٦، ٨، ... والنمط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... ونلاحظ أن النمط العددي هو ترتيب لمجموعة من الأعداد الحقيقية حيث تربط بين كل عدد والعدد الذي يليه علاقة، هذه العلاقة هي التي نوجد عن طريقها حدود هذا النمط أو نوجد حد ما بدون الحاجة إلى معرفة الحدود السابقة له وفي هذه الوحدة سوف نتناول هذه الأنماط بدراسة أكثر عمقا تحت مسمى جديد وهو المتتابعات.

ترتيب

المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة \mathbb{N}^+ أو مجموعة جزئية منها ومدادها مجموعة من الأعداد الحقيقية \mathbb{R} حيث يرمز للحد الأول بالرمز u_1 والحد الثاني بالرمز u_2 والحد الثالث بالرمز u_3 وهكذا ... والحد النوني بالرمز u_n ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالاتي:

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

ويرمز لها بالرمز (u_n)

فمثلاً المتتابعة $u_n = 2n + 1$ هي دالة مجالها \mathbb{N}^+

أو لنا نعوض عن n بالأعداد ١، ٢، ٣، ... ويفتح الحدود u_1, u_2, u_3, \dots

أي إننا

بالتعويض عن $u = 1$ ينتج $ع = 1 + 1 \times 2 = 3$ أي أن الحد الأول هو 3
وبالتعويض عن $u = 2$ ينتج $ع = 1 + 2 \times 2 = 5$ أي أن الحد الثاني هو 5
وبالتعويض عن $u = 3$ ينتج $ع = 1 + 3 \times 2 = 7$ أي أن الحد الثالث هو 7
لما ع u فهي الحد العام الذي توجد منه أي حد من خلال التعويض فإذا أردنا إيجاد
الحد السادس نعوض عن $u = 6$ ويرمز للحد السادس بالرمز $ع_6$ وينتج الطريقة
يمكن إيجاد أي حد ويمكن كتابة المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين هكذا يلي:
(... 4 7 6 5 3) ويرمز للمتتابعة بالرمز (ع $_n$)

ملاحظات هامة

- 1 حدود المتتابعة هي صور عناصر مجال المتابعة.
- 2 لا حظ الفرق بين (ع $_n$) حيث (ع $_n$) يعبر عن المتتابعة بينما ع يعبر عن حدها التولي.
- 3 يجب أن نفرق بين المتتابعة والمجموعة فالمتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) أي أن الترتيب له أهمية كبيرة بينما المجموعة لا يهم ترتيب عناصرها.
- 4 عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

المتابعة المنتهية والمنتبعة غير المنتهية

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً (أو يمكن حسره أو عدده)
مثل (1 4 8 6 4 8 2)
وتكون المتتابعة غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (أو عدد لا نهائي من الحدود)
مثل (... 6 5 4 3 1)

مثال

أكتب كلاً من المتتابعات التي حدها التولي يعطى بالعلاقة:

- 1 $ع_n = 1 + 2u$ (أي خمسة حدود وتبدأ من الحد الأول)
- 2 $ع_n = 2u$ (أي عدد غير منته من الحدود وتبدأ من الحد الأول)

الحل

① يوضع $u = 1$ في $ع = 1 + 2 \times 1 = 3$

$$ع = 1 + (1) 2 = 3 \quad \text{و} \quad ع = 1 + (2) 2 = 5$$

$$9 = 1 + (4)2 = {}_4C_1$$

$$7 = 1 + (3)2 = {}_3C_1$$

$$11 = 1 + (5)2 = {}_5C_1$$

∴ المتتابة هي (١١٤٩٤٧٤٥٤٣) متتابة منتهية.

② بوضع $n = ١٠$... ٤٥٤٣٤٢٤١

$$1 = {}^1C_1 = {}_1C_1$$

$$1 = {}^1C_1 = {}_1C_1$$

$$16 = {}^4C_1 = {}_4C_1$$

$$9 = {}^3C_1 = {}_3C_1$$

$$25 = {}^5C_1 = {}_5C_1$$

∴ المتتابة هي (١٠٤٣٥٤١٦٤٩٤٤١٠٠) متتابة غير منتهية.

الحد العام للمتتابة

الحد العام للمتتابة (ويسمى أحياناً بالحد الفلوي) يكتب u_n حيث n صورة العنصر الذي ترقبه n في مجال المتتابة ويمكن إستنتاجه أحياناً من خلال حدود معطاة للمتتابة.

أمثلاً

الحد العام للمتتابة الأعداد الزوجية: $2, 4, 6, 8, \dots$ هو $u_n = 2n$

الحد العام للمتتابة الأعداد الفردية: $1, 3, 5, 7, \dots$ هو $u_n = 2n - 1$

الحد العام للمتتابة: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ هو $u_n = \frac{1}{n+2}$

مثال ٢

اكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتتابة (u_n)

المعرفة كالآتي: $u_1 = 1, u_2 = 1 + u_1$ حيث $n \leq 1$

الحل

بالتعويض عن قيمة $n = ١, ٢, ٣, ٤, ٥$

في العلاقة $u_n = 1 + u_{n-1}$

بوضع $n = 1$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

بوضع $n = 2$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + u_1$$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2$$

$$\begin{aligned}
 & \text{أو أن } ٢ = ٨ = ٤ \times ٢ = ٢ \times ٤ \quad \text{بوضع } ٢ = ٤ \\
 & \text{بالتعويض عن } ٢ = ٤ \quad (٤ = ٢) \\
 & \therefore ٢ = ٤ \\
 & \text{أو أن } ٢ = ١٦ = ٨ \times ٢ = ٤ \times ٤ \quad \text{بوضع } ٤ = ٨ \\
 & \text{بالتعويض عن } ٤ = ٨ \quad (٨ = ٤) \\
 & \therefore ٤ = ٨ \\
 & \text{أو أن } ٢ = ٣٢ = ١٦ \times ٢ = ٨ \times ٤ \quad \text{بوضع } ٨ = ١٦ \\
 & \text{بالتعويض عن } ٨ = ١٦ \quad (١٦ = ٨) \\
 & \therefore ٨ = ١٦
 \end{aligned}$$

الحدود الخمسة الأولى للمتتابة هي: (٣٢، ١٦، ٨، ٤، ٢)

الحد العام للمتتابة (٢) هو: $٢ = ٢^n$

ملاحظات

- إذا اختلفت إشارة كل حد في المتتابة عن الحد السابق له مباشرة مثل المتتابة $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots)$ فإن المتتابة في هذه الحالة تسمى متتابة تذبذبية.
- المتتابة الثابتة هي متتابة جميع حدودها متساوية ويكون حدها العام على الصورة $٢ = ١$ حيث $٢ \in \mathbb{R}$ ويكون أي حد - الحد السابق له = صفر وقد تكون منتهية مثل المتتابة (٦، ٦، ٦، ٦، ٦، ...) أو غير منتهية مثل (١، ١، ١، ١، ١، ...).
- بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة وبالتالي غير معروف حدها العام.

المتتابة التزايدية والمتتابة التناقصية

تكون المتتابة (٢) تزايدية إذا كان $٢ < ٢ + ١$ أي أن المتتابة تكون تزايدية إذا كان كل حد من حدود المتتابة أكبر من الحد السابق له مباشرة.

وتكون المتتابة (٢) تناقصية إذا كان $٢ > ٢ + ١$ أي أن المتتابة تكون تناقصية إذا كان كل حد من حدود المتتابة أصغر من الحد السابق له مباشرة.

فمثلاً

المتتابة (٢، ٤، ٨، ١٦، ...) متتابة تزايدية لأن $٢ < ٤$ أي أن $٢ < ٢ + ٢$ ويمكننا
المتتابة (٨، ٤، ٢، ١، ...) متتابة تناقصية لأن $٨ > ٤$ أي أن $٨ > ٢ + ٢$ ويمكننا

مثال ٢

نفس أيا من المتتابعات (ع) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك:

$$\textcircled{1} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad \textcircled{2} \text{ ع } \frac{1}{1 - 2} = \text{ع} \quad \textcircled{3} \text{ ع } 3 + \frac{2(1-)}{2} = \text{ع}$$

الحل

نوجد ع₁ + ع₂ ثم نوجد ع₁ - ع₂

إذا كان الناتج < ، تكون المتتابعة تزايدية وإذا كان الناتج > ، تكون المتتابعة تناقصية

$$\textcircled{1} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad 3 + 2 = 1 + 2 + 2 = 1 + (1 + 2) 2 = \text{ع} + \text{ع}$$

$$\therefore \text{ع} - \text{ع} = 1 - 2 = -1 < 0$$

$\therefore \text{ع} < \text{ع}$ لأن الناتج أكبر من صفر

\therefore المتتابعة تزايدية لجميع قيم ن

$$\textcircled{2} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad \frac{1}{1 - 2} = \text{ع} \quad \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{1 - 2 + 2} = \frac{1}{1 - (1 + 2) 2} = \text{ع} + \text{ع}$$

$$\therefore \text{ع} - \text{ع} = \frac{1 - 2}{(1 - 2)(1 + 2)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2}{(1 - 2)(1 + 2)} = \frac{1}{1 - 2} - \frac{1}{1 + 2} = \text{ع} - \text{ع}$$

$\therefore \text{ع} > \text{ع}$ لأن الناتج أصغر من صفر

\therefore المتتابعة تناقصية لجميع قيم ن

$$\textcircled{3} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad 3 + \frac{2(1-)}{2} = \text{ع} \quad 3 + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = \text{ع} + \text{ع}$$

$$\text{ع} - \text{ع} = \frac{2(1-)}{2} - \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = 3 - \frac{2(1-)}{2} - 3 + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = \text{ع} - \text{ع}$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1 + 2} \right]^{1 + 2} (1 -) = \frac{1 + 2(1-)}{2} + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} =$$

$$\left(\frac{1 + 2}{(1 + 2) 2} \right)^{1 + 2} (1 -) = \left[\frac{(1 + 2) + 2}{(1 + 2) 2} \right]^{1 + 2} (1 -) =$$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردي وسالب عندما ن عدد زوجي أي أن المتتابعة

ليست تزايدية وليست تناقصية.

٥ المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هي عملية جمع حدود المتتابعة **فمثلاً** (١٠٨٤٦٤٤٢) هي متتابعة تتكون من خمسة حدود بينما المتسلسلة هي عملية جمع لهذه الحدود.
أو أن $١٠ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢$ هي المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة وذلك بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة ويمكن استخدام رمز التجميع « Σ » ويقرأ «سيجما» لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

فمثلاً

المتسلسلة السابقة تتكون من جمع الحدود الخمسة للمتتابعة وتكتب باستخدام رمز التجميع بالصورة $\sum_{i=1}^5 x_i$ وهي تعني $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.
ومن ذلك يمكن تعريف المتسلسلة المنتهية والمتسلسلة غير المنتهية كما يلي:

٦ المتسلسلة المنتهية

تكتب بالصورة: $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ حيث n عدد صحيح موجب، x_n هو الحد الذي ترتيبه n في المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة ففي المتسلسلة المنتهية $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ يمكن كتابتها بالصورة $\sum_{i=1}^n (x_i)$ وتقرأ مجموع x_i من $i=1$ إلى $i=n$.

أي أن مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية والقيمة العددية للمتسلسلة هي مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

ويمكن إيجاد مجموع مكوّنات المتسلسلة $\sum_{i=1}^3 x_i$ كما يلي:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \sum_{i=1}^3 (x_i)$$

٧ المتسلسلة غير المنتهية

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها فمثلاً المتسلسلة $٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + \dots$ تكتب بالصورة $\sum_{i=1}^{\infty} (2^i)$ وقد استخدم الرمز ∞ ليدل على ذلك.

ننظر أن نحل إلى بعض النتائج من هذه الخواص منها ،

١٠ مجموع الأعداد الزوجية

مجموع الأعداد الزوجية = $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

$$(1+n)u = \frac{(1+u)u}{2} \times 2 - \sqrt{\sum_{i=1}^n 2} = \sqrt{2 \sum_{i=1}^n 1}$$

أي أن مجموع الأعداد الزوجية إلى n حدًا = $(1+n)u$

١١ مجموع الأعداد الفردية

مجموع الأعداد الفردية = $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

$$1 \sum_{i=1}^n 1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n 2} = (1-\sqrt{2}) \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$^2u = u - u + ^2u = u \times 1 - \frac{(1+u)u}{2} \times 2 =$$

أي أن مجموع الأعداد الفردية إلى n حدًا = 2u

مثال ١

اكتب كلاً من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك :

$$1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \quad 2 \sum_{i=1}^n (1+\sqrt{2}) \quad 3 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}} \right)$$

الحل

① بوضع $r=1$ يكون $1 = ^1(1) = 1$ ، بوضع $r=2$ يكون $4 = ^2(2) = 4$

بوضع $r=3$ يكون $9 = ^3(3) = 9$ ، بوضع $r=4$ يكون $16 = ^4(4) = 16$

وتكون المتسلسلة هي $(1, 4, 9, 16, \dots)$

أول ، المتسلسلة هي $(1, 4, 9, 16, \dots)$ ويكون $^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots = 30$

مثال

أوجد نظريتين مختلفتين: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$)

الحل

الطريقة الأولى: التعويض المباشر،

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) + (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) + (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$8 = 6 + 2 + 0 + 0 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) +$$

الطريقة الثانية: استخدام الخواص الجبرية للتجميع،

$$\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(1 + 2 \times 2)(1 + 2)2}{4} + \frac{(1 + 2)2}{4} \times 3 - 2 \times 2 =$$

$$\frac{9 \times 2 \times 2}{4} + \frac{2 \times 2}{1} \times 3 - 8 =$$

$$8 = 30 + 30 - 8 =$$

مثال

إذا كان $\frac{u}{\sqrt{2}} = 190$ أوجد قيمة u

الحل

$$190 = \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$190 = \frac{(1 + u)u}{4} \therefore$$

$$380 = (1 + u)u \therefore$$

$$u = 380 - u + 2u \therefore$$

$$u = (20 + u)(19 - u) \therefore$$

$$\therefore u = 19 \text{ أو } u = 20 \text{ (مرفوض لأن } u \in \mathbb{N}^+)$$

مثال ٧

أوجد ما يأتي :

① مجموع الأعداد الزوجية، إلى العدد ١٠٠

② مجموع الأعداد الفردية إلى العدد ٤٩

الحل

① المجموع = $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ ، عدد الحدود $n = 50$

$$2050 = (1 + 50) 50 = (1 + n) n = \sqrt{2} \sum_{k=1}^n k$$

② $1 - 2 = 49$ ، $25 = n$ ،

$$625 = {}^2(25) = {}^2n = (1 - \sqrt{2}) \sum_{k=1}^n k$$

مثال ٨

أوجد عدد الحدود في كل مما يأتي :

① إذا كان $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 1260$

② إذا كان $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2n = 289$

الحل

① $1260 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

$$n + {}^2n = 1260 \quad (1 + n) n = \sqrt{2} \sum_{k=1}^n k$$

$$n = 1260 - n + {}^2n \quad n = 36 - n \text{ (مرفوض)}$$

$$36 = n \quad \therefore \text{عدد الحدود} = 36 \text{ حدًا}$$

② $289 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2n$

$$289 = {}^2n \quad {}^2n = (1 - \sqrt{2}) \sum_{k=1}^n k$$

$$17 = n \quad \therefore \text{عدد الحدود} = 17 \text{ حدًا}$$

مثال

استخدم رمز التجميع \sum في كتابة المتسلسلة: $2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \dots$

الحل

نكتب أولاً الحد العام بالطريقة التالية ،

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ \times & \times & \times \\ 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 9 & 16 \end{array}$$

$$(2+1)(1+1) = 2 \times 2 = 4$$

$$(2+2)(1+2) = 3 \times 3 = 9$$

$$(2+3)(1+3) = 4 \times 4 = 16$$

$$(2+r)(1+r) = r^2$$

\therefore الحد العام للمتتالية هو $r^2 = (2+r)(1+r)$ حيث $r \in \mathbb{N}^+$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} (2+r)(1+r) = \dots + 4 + 9 + 16 + \dots$$

أشياء كثيرة
لا تتركها
لنفسك
لأنك
تستطيع

راجع معنا واحدا من نفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق في صورة إختبار تراكمي على ما سبق دراسته يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدوس الجديد وهذا يجعلك تذكر ما درست بإستقرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة بما يجعلك في تواصل دائم مع المادة وهدد لميزة يقدمها لك كتاب الماهر

تأكد من أنصححرام

كتب @aneasnowe

مسائل المستوى الأول

أكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

١) متتابعة الأعداد الفردية السالبة التي تبدأ بالعدد (-١)

٢) متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ و ٨١ والتي يقبل كل منها القسمة على ٥

٢) أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) المتتامة هي دالة مجالها هو

[$-\infty$; $+\infty$] \cup $[-\infty$; $-\infty$] \cup $[\infty$; $+\infty$] أو مجموعة جزئية منها

٢) العدد الخامس للمتتابعة (u_n) حيث $u_1 = 1$ و $u_2 = 2$ هو

[٩] [١٠] [١١] [١٢]

٣) الحد الرابع للمتتابعة (u_n) حيث $u_1 = 1$ و $u_2 = 2$ هو

[٤] [١٦] [١٩] [٢٠]

٤) هي المتتابعة (u_n) حيث $u_1 = 1$ و $u_2 = 1$ إذا كان $u_1 = 1$ فإن $u_2 = 1$ هو

[١] [٢] [٣] [٤]

٥) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان $u_1 > u_2$ لكل $n \in \mathbb{N}$

[$u_1 > u_2$] [$u_1 \leq u_2$] [$u_1 = u_2$] [$u_1 < u_2$]

٦. تكون المتتالية ثابتة إذا كان $u_n = \dots$ لكل $n \leq 1$
 $[< u_n < u_{n+1} > \text{ أو } < u_n > u_{n+1} >]$

٧. تكون المتتالية تزايدية إذا كان $u_n = \dots$ لكل $n \leq 1$
 $[< u_n < u_{n+1} > \text{ أو } < u_n > u_{n+1} >]$

٨. الحد السابع للمتتابة (u_n) حيث $u_n = 2u_{n-1} + 3$ هو
 $[7 \text{ أو } 49 \text{ أو } 98 \text{ أو } 141]$

٩. الحد الرابع للمتتابة (u_n) حيث $u_n = \frac{u_{n-1}}{1+u_{n-1}}$ هو
 $[\frac{4}{3} \text{ أو } \frac{5}{4} \text{ أو } \frac{5}{3} \text{ أو } \frac{4}{5}]$

١٠. في المتتابة (u_n) حيث $u_n = 3u_{n-1} - 1$ إذا كان $u_1 = 7$ فإن $u_4 = \dots$
 $[3 \text{ أو } 4 \text{ أو } 5 \text{ أو } 6]$

١١. الحد النوني للمتتابة (u_n) هو
 $[2u_{n-1} \text{ أو } u_{n-1}^2 \text{ أو } u_{n-1} \text{ أو } 2u_{n-1}^2]$

١٢. الحد النوني للمتتابة (u_n) هو
 $[(1-u)^n \text{ أو } u^{n-1} \text{ أو } u^n \text{ أو } (1-u)^{n-1}]$

١٣. بين المتتابعات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية:

١. $(\dots, 1967, 4461)$ ٢. $(216, \dots, 1967, 5043)$

٣. المتتابة (u_n) حيث $u_n = 1 - u_{n-1}$ ٤. $u_n = 1 - u_{n-1}$

٥. المتتابة (u_n) حيث $u_n = \frac{1}{n} + 1$ ٦. $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

١٤. أكتشف النمط ثم أكتب الحد التالي:

١. $\dots, 1967, 73, 69, 65, \dots$ ٢. $63, 124, 185, \dots$

٣. $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ٤. $\dots, 1967, 1967, 1967, 1967, \dots$

التمرين ١٥ مسائل المستوى الثاني

١٥. أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١. الحد الخامس في متتابة الأعداد الطبيعية التي تقبل تقسمة على ٥ هو

$[5 \text{ أو } 25 \text{ أو } 20 \text{ أو } 10]$

٢) الحد العاشر من المتتابعة التي حدها النوني $\frac{1}{n} = 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ هو

$$\left[\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right]$$

٣) قاعدة المتتابعة $(1 \times 2), (2 \times 3), (3 \times 4), (4 \times 5), \dots$ هي

$$[(1+2)(1+3), (1+3)2, (1+3)3, (1+3)4, \dots]$$

١.١) المتتابعة التي حدها النوني $\frac{1}{n} = 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^+$ تمثل متتابعة

[تزايدية | تناقصية | ثابتة | تذبذبية]

٢) أكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التي حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

$$\frac{1}{n-1} = u_n \quad (1)$$

$$u_n + u = u_n \quad (2)$$

$$2(2-u)^n(1-u) = u_n \quad (3)$$

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n \quad (4)$$

$$u_n = \left(\pi \frac{u}{4}\right) \quad (5)$$

$$u_n = \frac{u(1-u)}{2} \quad (6)$$

٣) أكتب كلاً من المتتابعات التي حدها النوني يعطى بالعلاقة:

(الحد خمسة حدود لهذا من الحد النوني)

$$1 - u + u^2 = u_n \quad (1)$$

(الحد غير مائة من الحدود لهذا من الحد النوني)

$$u_n = u^2 \quad (2)$$

٤) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة (u_n) المعرفة كالاتي:

$$u_n = 1 - u_{n-1} \quad \text{حيث } u_1 = 1$$

٥) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة (u_n) المعرفة كالاتي:

$$u_n = 3 - u_{n-1} \quad \text{حيث } u_1 = 2$$

٦) يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق في اليوم الأول ثم يريد الفترة

بعد ذلك بمعدل دقيقتين يومياً

١) أكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

٢) أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

٣) أوجد الزمن الذي يستغرقه كريم في اليوم السابع.

٤) في أي يوم سيكون الزمن الذي يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك.

١١) بين أيًا من المتتابعات (ع) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك في كل مما يأتي:

$$٢ + ٥٣ = ع ٢$$

$$٢ + \frac{1}{٥} = ع ١$$

$$٥(٢-) = ع ٤$$

$$٥\left(\frac{1}{٢}\right) = ع ٣$$

$$(١ + ٥) ٥(١-) = ع ٦$$

$$١ + ٥\left(\frac{1}{٢}\right) = ع ٥$$

١٢) أكتب معكوك كل من المتسلسلات الآتية:

$$\left(\sqrt{٤} + \sqrt{١-}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٢$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (٢ - \sqrt{٣})$$

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{}} - \frac{1}{\sqrt{}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٤$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (١ - \sqrt{\frac{1}{٢}})$$

١٣) أوجد مجموع المعكوك في كل من المتسلسلات الآتية ثم **تحقق** من صحة الناتج

بإستخدام الآلة الحاسبة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (٣ + \sqrt{٢}) ٢$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ٩ ١$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (١ + \sqrt{٥}) ٤$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (٢ - \sqrt{٣}) ٣$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(٢ + \frac{1}{\sqrt{}}\right) ٦$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (٢ - \sqrt{٥}) ٥$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{٢}\right) ٨$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٢}\right) \times ٣ ٧$$

١٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) المتسلسلة $٥ + ١٥ + ٢٥ + ٣٥ + \dots$ تكتب بإستخدام رمز المجموع على الصورة

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٥}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٢}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٥}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٢}) \right]$$

٢) المتسلسلة $١ \times ٧ + ٢ \times ٧ + ٣ \times ٧ + \dots + ١٠ \times ٧$ تكتب بإستخدام رمز المجموع على

$$\text{الصورة} \dots \dots \dots \left[\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٧}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٤}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٧}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٤}) \right]$$

٣) المتسلسلة $\frac{1}{٤} + \frac{1}{٨} + \frac{1}{١٦} + \dots$ تكتب بإستخدام رمز المجموع على الصورة

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٥}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٤}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٤}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٥}\right) \right]$$

١٨ في المتتابعة (u_n) إذا كان $u_1 = 9$ ، $u_2 = 4$ ، $u_3 = 1$ ، $u_4 = -2$ ، $u_5 = -5$ ، $u_6 = -8$ ، $u_7 = -11$ ، $u_8 = -14$ ، $u_9 = -17$ ، $u_{10} = -20$ ، $u_{11} = -23$ ، $u_{12} = -26$ ، $u_{13} = -29$ ، $u_{14} = -32$ ، $u_{15} = -35$ ، $u_{16} = -38$ ، $u_{17} = -41$ ، $u_{18} = -44$ ، $u_{19} = -47$ ، $u_{20} = -50$ ، $u_{21} = -53$ ، $u_{22} = -56$ ، $u_{23} = -59$ ، $u_{24} = -62$ ، $u_{25} = -65$ ، $u_{26} = -68$ ، $u_{27} = -71$ ، $u_{28} = -74$ ، $u_{29} = -77$ ، $u_{30} = -80$ ، $u_{31} = -83$ ، $u_{32} = -86$ ، $u_{33} = -89$ ، $u_{34} = -92$ ، $u_{35} = -95$ ، $u_{36} = -98$ ، $u_{37} = -101$ ، $u_{38} = -104$ ، $u_{39} = -107$ ، $u_{40} = -110$ ، $u_{41} = -113$ ، $u_{42} = -116$ ، $u_{43} = -119$ ، $u_{44} = -122$ ، $u_{45} = -125$ ، $u_{46} = -128$ ، $u_{47} = -131$ ، $u_{48} = -134$ ، $u_{49} = -137$ ، $u_{50} = -140$ ، $u_{51} = -143$ ، $u_{52} = -146$ ، $u_{53} = -149$ ، $u_{54} = -152$ ، $u_{55} = -155$ ، $u_{56} = -158$ ، $u_{57} = -161$ ، $u_{58} = -164$ ، $u_{59} = -167$ ، $u_{60} = -170$ ، $u_{61} = -173$ ، $u_{62} = -176$ ، $u_{63} = -179$ ، $u_{64} = -182$ ، $u_{65} = -185$ ، $u_{66} = -188$ ، $u_{67} = -191$ ، $u_{68} = -194$ ، $u_{69} = -197$ ، $u_{70} = -200$ ، $u_{71} = -203$ ، $u_{72} = -206$ ، $u_{73} = -209$ ، $u_{74} = -212$ ، $u_{75} = -215$ ، $u_{76} = -218$ ، $u_{77} = -221$ ، $u_{78} = -224$ ، $u_{79} = -227$ ، $u_{80} = -230$ ، $u_{81} = -233$ ، $u_{82} = -236$ ، $u_{83} = -239$ ، $u_{84} = -242$ ، $u_{85} = -245$ ، $u_{86} = -248$ ، $u_{87} = -251$ ، $u_{88} = -254$ ، $u_{89} = -257$ ، $u_{90} = -260$ ، $u_{91} = -263$ ، $u_{92} = -266$ ، $u_{93} = -269$ ، $u_{94} = -272$ ، $u_{95} = -275$ ، $u_{96} = -278$ ، $u_{97} = -281$ ، $u_{98} = -284$ ، $u_{99} = -287$ ، $u_{100} = -290$ ، $u_{101} = -293$ ، $u_{102} = -296$ ، $u_{103} = -299$ ، $u_{104} = -302$ ، $u_{105} = -305$ ، $u_{106} = -308$ ، $u_{107} = -311$ ، $u_{108} = -314$ ، $u_{109} = -317$ ، $u_{110} = -320$ ، $u_{111} = -323$ ، $u_{112} = -326$ ، $u_{113} = -329$ ، $u_{114} = -332$ ، $u_{115} = -335$ ، $u_{116} = -338$ ، $u_{117} = -341$ ، $u_{118} = -344$ ، $u_{119} = -347$ ، $u_{120} = -350$ ، $u_{121} = -353$ ، $u_{122} = -356$ ، $u_{123} = -359$ ، $u_{124} = -362$ ، $u_{125} = -365$ ، $u_{126} = -368$ ، $u_{127} = -371$ ، $u_{128} = -374$ ، $u_{129} = -377$ ، $u_{130} = -380$ ، $u_{131} = -383$ ، $u_{132} = -386$ ، $u_{133} = -389$ ، $u_{134} = -392$ ، $u_{135} = -395$ ، $u_{136} = -398$ ، $u_{137} = -401$ ، $u_{138} = -404$ ، $u_{139} = -407$ ، $u_{140} = -410$ ، $u_{141} = -413$ ، $u_{142} = -416$ ، $u_{143} = -419$ ، $u_{144} = -422$ ، $u_{145} = -425$ ، $u_{146} = -428$ ، $u_{147} = -431$ ، $u_{148} = -434$ ، $u_{149} = -437$ ، $u_{150} = -440$ ، $u_{151} = -443$ ، $u_{152} = -446$ ، $u_{153} = -449$ ، $u_{154} = -452$ ، $u_{155} = -455$ ، $u_{156} = -458$ ، $u_{157} = -461$ ، $u_{158} = -464$ ، $u_{159} = -467$ ، $u_{160} = -470$ ، $u_{161} = -473$ ، $u_{162} = -476$ ، $u_{163} = -479$ ، $u_{164} = -482$ ، $u_{165} = -485$ ، $u_{166} = -488$ ، $u_{167} = -491$ ، $u_{168} = -494$ ، $u_{169} = -497$ ، $u_{170} = -500$ ، $u_{171} = -503$ ، $u_{172} = -506$ ، $u_{173} = -509$ ، $u_{174} = -512$ ، $u_{175} = -515$ ، $u_{176} = -518$ ، $u_{177} = -521$ ، $u_{178} = -524$ ، $u_{179} = -527$ ، $u_{180} = -530$ ، $u_{181} = -533$ ، $u_{182} = -536$ ، $u_{183} = -539$ ، $u_{184} = -542$ ، $u_{185} = -545$ ، $u_{186} = -548$ ، $u_{187} = -551$ ، $u_{188} = -554$ ، $u_{189} = -557$ ، $u_{190} = -560$ ، $u_{191} = -563$ ، $u_{192} = -566$ ، $u_{193} = -569$ ، $u_{194} = -572$ ، $u_{195} = -575$ ، $u_{196} = -578$ ، $u_{197} = -581$ ، $u_{198} = -584$ ، $u_{199} = -587$ ، $u_{200} = -590$ ، $u_{201} = -593$ ، $u_{202} = -596$ ، $u_{203} = -599$ ، $u_{204} = -602$ ، $u_{205} = -605$ ، $u_{206} = -608$ ، $u_{207} = -611$ ، $u_{208} = -614$ ، $u_{209} = -617$ ، $u_{210} = -620$ ، $u_{211} = -623$ ، $u_{212} = -626$ ، $u_{213} = -629$ ، $u_{214} = -632$ ، $u_{215} = -635$ ، $u_{216} = -638$ ، $u_{217} = -641$ ، $u_{218} = -644$ ، $u_{219} = -647$ ، $u_{220} = -650$ ، $u_{221} = -653$ ، $u_{222} = -656$ ، $u_{223} = -659$ ، $u_{224} = -662$ ، $u_{225} = -665$ ، $u_{226} = -668$ ، $u_{227} = -671$ ، $u_{228} = -674$ ، $u_{229} = -677$ ، $u_{230} = -680$ ، $u_{231} = -683$ ، $u_{232} = -686$ ، $u_{233} = -689$ ، $u_{234} = -692$ ، $u_{235} = -695$ ، $u_{236} = -698$ ، $u_{237} = -701$ ، $u_{238} = -704$ ، $u_{239} = -707$ ، $u_{240} = -710$ ، $u_{241} = -713$ ، $u_{242} = -716$ ، $u_{243} = -719$ ، $u_{244} = -722$ ، $u_{245} = -725$ ، $u_{246} = -728$ ، $u_{247} = -731$ ، $u_{248} = -734$ ، $u_{249} = -737$ ، $u_{250} = -740$ ، $u_{251} = -743$ ، $u_{252} = -746$ ، $u_{253} = -749$ ، $u_{254} = -752$ ، $u_{255} = -755$ ، $u_{256} = -758$ ، $u_{257} = -761$ ، $u_{258} = -764$ ، $u_{259} = -767$ ، $u_{260} = -770$ ، $u_{261} = -773$ ، $u_{262} = -776$ ، $u_{263} = -779$ ، $u_{264} = -782$ ، $u_{265} = -785$ ، $u_{266} = -788$ ، $u_{267} = -791$ ، $u_{268} = -794$ ، $u_{269} = -797$ ، $u_{270} = -800$ ، $u_{271} = -803$ ، $u_{272} = -806$ ، $u_{273} = -809$ ، $u_{274} = -812$ ، $u_{275} = -815$ ، $u_{276} = -818$ ، $u_{277} = -821$ ، $u_{278} = -824$ ، $u_{279} = -827$ ، $u_{280} = -830$ ، $u_{281} = -833$ ، $u_{282} = -836$ ، $u_{283} = -839$ ، $u_{284} = -842$ ، $u_{285} = -845$ ، $u_{286} = -848$ ، $u_{287} = -851$ ، $u_{288} = -854$ ، $u_{289} = -857$ ، $u_{290} = -860$ ، $u_{291} = -863$ ، $u_{292} = -866$ ، $u_{293} = -869$ ، $u_{294} = -872$ ، $u_{295} = -875$ ، $u_{296} = -878$ ، $u_{297} = -881$ ، $u_{298} = -884$ ، $u_{299} = -887$ ، $u_{300} = -890$ ، $u_{301} = -893$ ، $u_{302} = -896$ ، $u_{303} = -899$ ، $u_{304} = -902$ ، $u_{305} = -905$ ، $u_{306} = -908$ ، $u_{307} = -911$ ، $u_{308} = -914$ ، $u_{309} = -917$ ، $u_{310} = -920$ ، $u_{311} = -923$ ، $u_{312} = -926$ ، $u_{313} = -929$ ، $u_{314} = -932$ ، $u_{315} = -935$ ، $u_{316} = -938$ ، $u_{317} = -941$ ، $u_{318} = -944$ ، $u_{319} = -947$ ، $u_{320} = -950$ ، $u_{321} = -953$ ، $u_{322} = -956$ ، $u_{323} = -959$ ، $u_{324} = -962$ ، $u_{325} = -965$ ، $u_{326} = -968$ ، $u_{327} = -971$ ، $u_{328} = -974$ ، $u_{329} = -977$ ، $u_{330} = -980$ ، $u_{331} = -983$ ، $u_{332} = -986$ ، $u_{333} = -989$ ، $u_{334} = -992$ ، $u_{335} = -995$ ، $u_{336} = -998$ ، $u_{337} = -1001$ ، $u_{338} = -1004$ ، $u_{339} = -1007$ ، $u_{340} = -1010$ ، $u_{341} = -1013$ ، $u_{342} = -1016$ ، $u_{343} = -1019$ ، $u_{344} = -1022$ ، $u_{345} = -1025$ ، $u_{346} = -1028$ ، $u_{347} = -1031$ ، $u_{348} = -1034$ ، $u_{349} = -1037$ ، $u_{350} = -1040$ ، $u_{351} = -1043$ ، $u_{352} = -1046$ ، $u_{353} = -1049$ ، $u_{354} = -1052$ ، $u_{355} = -1055$ ، $u_{356} = -1058$ ، $u_{357} = -1061$ ، $u_{358} = -1064$ ، $u_{359} = -1067$ ، $u_{360} = -1070$ ، $u_{361} = -1073$ ، $u_{362} = -1076$ ، $u_{363} = -1079$ ، $u_{364} = -1082$ ، $u_{365} = -1085$ ، $u_{366} = -1088$ ، $u_{367} = -1091$ ، $u_{368} = -1094$ ، $u_{369} = -1097$ ، $u_{370} = -1100$ ، $u_{371} = -1103$ ، $u_{372} = -1106$ ، $u_{373} = -1109$ ، $u_{374} = -1112$ ، $u_{375} = -1115$ ، $u_{376} = -1118$ ، $u_{377} = -1121$ ، $u_{378} = -1124$ ، $u_{379} = -1127$ ، $u_{380} = -1130$ ، $u_{381} = -1133$ ، $u_{382} = -1136$ ، $u_{383} = -1139$ ، $u_{384} = -1142$ ، $u_{385} = -1145$ ، $u_{386} = -1148$ ، $u_{387} = -1151$ ، $u_{388} = -1154$ ، $u_{389} = -1157$ ، $u_{390} = -1160$ ، $u_{391} = -1163$ ، $u_{392} = -1166$ ، $u_{393} = -1169$ ، $u_{394} = -1172$ ، $u_{395} = -1175$ ، $u_{396} = -1178$ ، $u_{397} = -1181$ ، $u_{398} = -1184$ ، $u_{399} = -1187$ ، $u_{400} = -1190$ ، $u_{401} = -1193$ ، $u_{402} = -1196$ ، $u_{403} = -1199$ ، $u_{404} = -1202$ ، $u_{405} = -1205$ ، $u_{406} = -1208$ ، $u_{407} = -1211$ ، $u_{408} = -1214$ ، $u_{409} = -1217$ ، $u_{410} = -1220$ ، $u_{411} = -1223$ ، $u_{412} = -1226$ ، $u_{413} = -1229$ ، $u_{414} = -1232$ ، $u_{415} = -1235$ ، $u_{416} = -1238$ ، $u_{417} = -1241$ ، $u_{418} = -1244$ ، $u_{419} = -1247$ ، $u_{420} = -1250$ ، $u_{421} = -1253$ ، $u_{422} = -1256$ ، $u_{423} = -1259$ ، $u_{424} = -1262$ ، $u_{425} = -1265$ ، $u_{426} = -1268$ ، $u_{427} = -1271$ ، $u_{428} = -1274$ ، $u_{429} = -1277$ ، $u_{430} = -1280$ ، $u_{431} = -1283$ ، $u_{432} = -1286$ ، $u_{433} = -1289$ ، $u_{434} = -1292$ ، $u_{435} = -1295$ ، $u_{436} = -1298$ ، $u_{437} = -1301$ ، $u_{438} = -1304$ ، $u_{439} = -1307$ ، $u_{440} = -1310$ ، $u_{441} = -1313$ ، $u_{442} = -1316$ ، $u_{443} = -1319$ ، $u_{444} = -1322$ ، $u_{445} = -1325$ ، $u_{446} = -1328$ ، $u_{447} = -1331$ ، $u_{448} = -1334$ ، $u_{449} = -1337$ ، $u_{450} = -1340$ ، $u_{451} = -1343$ ، $u_{452} = -1346$ ، $u_{453} = -1349$ ، $u_{454} = -1352$ ، $u_{455} = -1355$ ، $u_{456} = -1358$ ، $u_{457} = -1361$ ، $u_{458} = -1364$ ، $u_{459} = -1367$ ، $u_{460} = -1370$ ، $u_{461} = -1373$ ، $u_{462} = -1376$ ، $u_{463} = -1379$ ، $u_{464} = -1382$ ، $u_{465} = -1385$ ، $u_{466} = -1388$ ، $u_{467} = -1391$ ، $u_{468} = -1394$ ، $u_{469} = -1397$ ، $u_{470} = -1400$ ، $u_{471} = -1403$ ، $u_{472} = -1406$ ، $u_{473} = -1409$ ، $u_{474} = -1412$ ، $u_{475} = -1415$ ، $u_{476} = -1418$ ، $u_{477} = -1421$ ، $u_{478} = -1424$ ، $u_{479} = -1427$ ، $u_{480} = -1430$ ، $u_{481} = -1433$ ، $u_{482} = -1436$ ، $u_{483} = -1439$ ، $u_{484} = -1442$ ، $u_{485} = -1445$ ، $u_{486} = -1448$ ، $u_{487} = -1451$ ، $u_{488} = -1454$ ، $u_{489} = -1457$ ، $u_{490} = -1460$ ، $u_{491} = -1463$ ، $u_{492} = -1466$ ، $u_{493} = -1469$ ، $u_{494} = -1472$ ، $u_{495} = -1475$ ، $u_{496} = -1478$ ، $u_{497} = -1481$ ، $u_{498} = -1484$ ، $u_{499} = -1487$ ، $u_{500} = -1490$ ، $u_{501} = -1493$ ، $u_{502} = -1496$ ، $u_{503} = -1499$ ، $u_{504} = -1502$ ، $u_{505} = -1505$ ، $u_{506} = -1508$ ، $u_{507} = -1511$ ، $u_{508} = -1514$ ، $u_{509} = -1517$ ، $u_{510} = -1520$ ، $u_{511} = -1523$ ، $u_{512} = -1526$ ، $u_{513} = -1529$ ، $u_{514} = -1532$ ، $u_{515} = -1535$ ، $u_{516} = -1538$ ، $u_{517} = -1541$ ، $u_{518} = -1544$ ، $u_{519} = -1547$ ، $u_{520} = -1550$ ، $u_{521} = -1553$ ، $u_{522} = -1556$ ، $u_{523} = -1559$ ، $u_{524} = -1562$ ، $u_{525} = -1565$ ، $u_{526} = -1568$ ، $u_{527} = -1571$ ، $u_{528} = -1574$ ، $u_{529} = -1577$ ، $u_{530} = -1580$ ، $u_{531} = -1583$ ، $u_{532} = -1586$ ، $u_{533} = -1589$ ، $u_{534} = -1592$ ، $u_{535} = -1595$ ، $u_{536} = -1598$ ، $u_{537} = -1601$ ، $u_{538} = -1604$ ، $u_{539} = -1607$ ، $u_{540} = -1610$ ، $u_{541} = -1613$ ، $u_{542} = -1616$ ، $u_{543} = -1619$ ، $u_{544} = -1622$ ، $u_{545} = -1625$ ، $u_{546} = -1628$ ، $u_{547} = -1631$ ، $u_{548} = -1634$ ، $u_{549} = -1637$ ، $u_{550} = -1640$ ، $u_{551} = -1643$ ، $u_{552} = -1646$ ، $u_{553} = -1649$ ، $u_{554} = -1652$ ، $u_{555} = -1655$ ، $u_{556} = -1658$ ، $u_{557} = -1661$ ، $u_{558} = -1664$ ، $u_{559} = -1667$ ، $u_{560} = -1670$ ، $u_{561} = -1673$ ، $u_{562} = -1676$ ، $u_{563} = -1679$ ، $u_{564} = -1682$ ، $u_{565} = -1685$ ، $u_{566} = -1688$ ، $u_{567} = -1691$ ، $u_{568} = -1694$ ، $u_{569} = -1697$ ، $u_{570} = -1700$ ، $u_{571} = -1703$ ، $u_{572} = -1706$ ، $u_{573} = -1709$ ، $u_{574} = -1712$ ، $u_{575} = -1715$ ، $u_{576} = -1718$ ، $u_{577} = -1721$ ، $u_{578} = -1724$ ، $u_{579} = -1727$ ، $u_{580} = -1730$ ، $u_{581} = -1733$ ، $u_{582} = -1736$ ، $u_{583} = -1739$ ، $u_{584} = -1742$ ، $u_{585} = -1745$ ، $u_{586} = -1748$ ، $u_{587} = -1751$ ، $u_{588} = -1754$ ، $u_{589} = -1757$ ، $u_{590} = -1760$ ، $u_{591} = -1763$ ، $u_{592} = -1766$ ، $u_{593} = -1769$ ، $u_{594} = -1772$ ، $u_{595} = -1775$ ، $u_{596} = -1778$ ، $u_{597} = -1781$ ، $u_{598} = -1784$ ، $u_{599} = -1787$ ، $u_{600} = -1790$ ، $u_{601} = -1793$ ، $u_{602} = -1796$ ، $u_{603} = -1799$ ، $u_{604} = -1802$ ، $u_{605} = -1805$ ، $u_{606} = -1808$ ، $u_{607} = -1811$ ، $u_{608} = -1814$ ، $u_{609} = -1817$ ، $u_{610} = -1820$ ، $u_{611} = -1823$ ، $u_{612} = -1826$ ، $u_{613} = -1829$ ، $u_{614} = -1832$ ، $u_{615} = -1835$ ، $u_{616} = -1838$ ، $u_{617} = -1841$ ، $u_{618} = -1844$ ، $u_{619} = -1847$ ، $u_{620} = -1850$ ، $u_{621} = -1853$ ، $u_{622} = -1856$ ، $u_{623} = -1859$ ، $u_{624} = -1862$ ، $u_{625} = -1865$ ، $u_{626} = -1868$ ، $u_{627} = -1871$ ، $u_{628} = -1874$ ، $u_{629} = -1877$ ، $u_{630} = -1880$ ، $u_{631} = -1883$ ، $u_{632} = -1886$ ، $u_{633} = -1889$ ، $u_{634} = -1892$ ، $u_{635} = -1895$ ، $u_{636} = -1898$ ، $u_{637} = -1901$ ، $u_{638} = -1904$ ، $u_{639} = -1907$ ، $u_{640} = -1910$ ، $u_{641} = -1913$ ، $u_{642} = -1916$ ، $u_{643} = -1919$ ، $u_{644} = -1922$ ، $u_{645} = -1925$ ، $u_{646} = -1928$ ، $u_{647} = -1931$ ، $u_{648} = -1934$ ، $u_{649} = -1937$ ، $u_{650} = -1940$ ، $u_{651} = -1943$ ، $u_{652} = -1946$ ، $u_{653} = -1949$ ، $u_{654} = -1952$ ، $u_{655} = -1955$ ، $u_{656} = -1958$ ، $u_{657} = -1961$ ، $u_{658} = -1964$ ، $u_{659} = -1967$ ، $u_{660} = -1970$ ، $u_{661} = -1973$ ، $u_{662} = -1976$ ، $u_{663} = -1979$ ، $u_{664} = -1982$ ، $u_{665} = -1985$ ، $u_{666} = -1988$ ، $u_{667} = -1991$ ، $u_{668} = -1994$ ، $u_{669} = -1997$ ، $u_{670} = -2000$ ، $u_{671} = -2003$ ، $u_{672} = -2006$ ، $u_{673} = -2009$ ، $$

مسائل فقهی مسنونہ علیا فی النکح

۱۷۱ اَوَّلُ فَيْصَةٍ مِنْ فِي كُلِّ مَعْنَى يَأْتِي :

$$[4] \quad \varphi_0 = (1 - \sqrt{r}) \sum_{i=1}^{\infty} \binom{r}{i} \quad |r| < 1, \quad \varphi_0 = (1 + \sqrt{r}) \sum_{i=1}^{\infty} \binom{r}{i} \quad |r| < 1$$

$$\left[\frac{1}{13}\right] \quad \lambda_0 = (u \text{ سو } + 2) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{13^i} \quad (1) \quad \text{و } \lambda_0 = (u \text{ سو } + 2) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{13^i} \quad (2)$$

﴿٢٦﴾ **أَوْحَدٌ فَيُحِبُّهُ** ،

① $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

$$[23] \quad \sum_{j=1}^n (1 + \frac{1}{j})^j - (1 + \frac{1}{n})^n \quad (3) \quad \sum_{j=1}^n (1 + \frac{1}{j})^j$$

$$\left[\frac{1}{13} \right] \quad \frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (1) \quad (\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (2)$$

(۱) إذا كان $\vec{r} = (x, y, z)$ في حيث : $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$

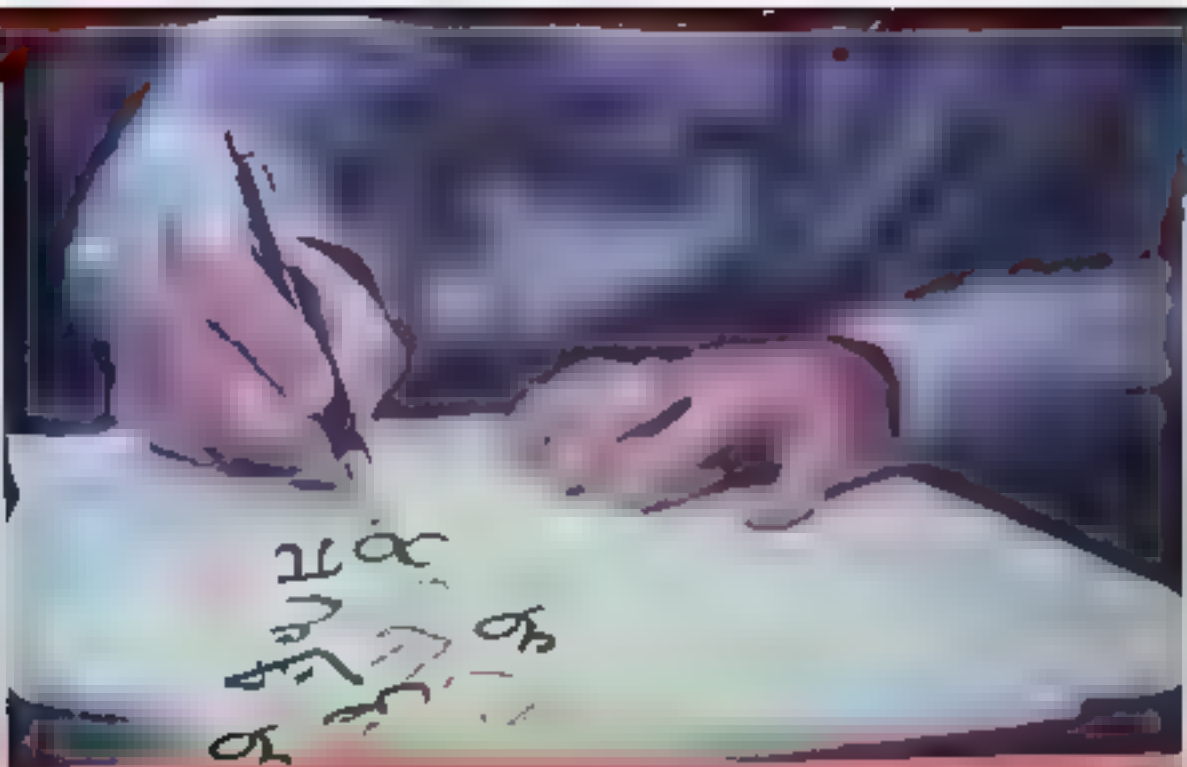
اوجد (٣) (١٠٠)

مثال إذا كانت د (س) = س - ٢ فلو جد $\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)$

❏ إذا كان x ، y ، z هما جذري المعادلة $x^2 - (y+z)x + yz = 0$

وكان $\frac{2}{3} (3س - 2ص) = 18$ فأوجد قيمة $ص$

10. اوجد قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot 2^{-n}$ (ما ب - ما ج)



المتتابعة الحسابية

الحد الأول

٢

هي المتتابعة (١، ٣، ٥، ٧، ٩، ...) ملاحظ أن كل حد من الحدود يريد عن الحد السابق له بمقدار ثابت (القيمة ٢) وهذا يعني أن الفرق بين أي عددين متتاليين هو ٢ وهو مقدار ثابت وهذا النوع من المتتابعات التي يكون فيها الفرق بين أي عددين مقدار ثابت يسمى بالمتتابعة الحسابية وهذا المقدار الثابت يسمى «أساس المتتابعة» ويرمز له عادة بالرمز a ومن ذلك يمكن تعريف المتتابعة الحسابية كما يلي:

المتتابعة الحسابية

هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقداراً ثابتاً

يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (أ) أي إن $a_n - a_{n-1} = a$ لكن $a \neq 0$

أي إن أساس المتتابعة الحسابية = أي حد فيها - الحد السابق له مباشرة

يمكن تخمين المتتابعة بمعلومية حده الأول (١) وأساسها (٢)

فمثلاً إذا كان الحد الأول $a_1 = 1$ والأساس $a = 2$

فإن المتتابعة يكون حده الأول ١ وحده الثاني يريد ٢ عن حده الأول أي:

$a_2 = a_1 + a = 1 + 2 = 3$ وهكذا، وتكون المتتابعة هي (١، ٣، ٥، ٧، ٩، ...)

مثال

أي من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية :

- ① $(19, 15, 11, 7, 3, \dots)$ ② $(\dots, 19, 16, 14, 12, 10, \dots)$ ③ $(\dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots)$

الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة (u_n) حسابية أم لا فافحصا توجد $u_n - u_{n-1}$ فإذا كان الناتج مقدار ثابت كانت المتتابعة (u_n) حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

$$① \quad u_n - u_{n-1} = 19 - 15 = 4 \quad ; \quad u_{n-1} - u_{n-2} = 15 - 11 = 4$$

$$\therefore u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3} = \dots = 4$$

\therefore المتتابعة حسابية وأساسها 4

$$② \quad u_n - u_{n-1} = 19 - 16 = 3 \quad ; \quad u_{n-1} - u_{n-2} = 16 - 14 = 2$$

$$\therefore u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = u_{n-2} - u_{n-3} = \dots = 3$$

\therefore المتتابعة حسابية وأساسها 3

$$③ \quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20} \quad ; \quad u_{n-1} - u_{n-2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$\therefore u_n - u_{n-1} \neq u_{n-1} - u_{n-2}$$

\therefore المتتابعة ليست حسابية

ملاحظة تسمى المتتابعة توافقية إذا كان مغلوها تكون متتابعة

حسابية مثل المتتابعة السابقة.

ملاحظات هامة

○ المتتابعة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في n حيث $u \in \mathbb{N}$ ويكون معامل n هو أساس المتتابعة.

○ فعلاً $(u_n) = (2n - 1)$ متتابعة حسابية لأن (u_n) دالة من الدرجة الأولى في n وأساسها 2

○ $(u_n) = (n^2 + 1)$ متتابعة ليست حسابية لأن (u_n) دالة من الدرجة الثانية في n

٥٠ المتتابعة الحسابية والمنتجة القسمة

المتتابعة الحسابية (u_n) تكون تزايدية إذا كان أساسها موجب ($u > 0$ صفر)
المتتابعة الحسابية (u_n) تكون تناقصية إذا كان أساسها سالب ($u < 0$ صفر)
المتتابعة الحسابية (u_n) تكون ثابتة إذا كان أساسها ($u = 0$ صفر)
فمثلاً

في المتتابعة ($1, 3, 5, 7, 9, \dots$) نلاحظ أن الأساس $2 = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7$ (عدد موجب)
لذلك فإن المتتابعة تكون تزايدية

وفي المتتابعة ($10, 8, 6, 4, 2, \dots$) نلاحظ أن الأساس $-2 = 8 - 10 = 6 - 8 = 4 - 6 = 2 - 4$ (عدد سالب)
لذلك فإن المتتابعة تكون تناقصية

وفي المتتابعة ($6, 6, 6, 6, 6, \dots$) نلاحظ أن الأساس $0 = 6 - 6 = 6 - 6 = 6 - 6 = 6 - 6$
لذلك فإن المتتابعة تكون ثابتة

مثال ٢

أي المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية، وإذا كانت متتابعة حسابية
فأوجد أساسها مبيّناً ما إذا كانت المتتابعة متناقصية أم متزايدة:

$$\begin{aligned} 1) (u_n) &= (1 + 2n) & 2) (u_n) &= (2 - 2n) \\ 3) (u_n) &= (2 - 2n) & 4) (u_n) &= (2 + \frac{1}{n}) \end{aligned}$$

الحل

نعرف ما إذا كانت المتتابعة (u_n) حسابية أم لا فإننا نوجد $u_{n+1} - u_n$ فإذا كان
النتيجة مقدار ثابت فكانت المتتابعة (u_n) حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

$$1) u_{n+1} - u_n = (1 + 2(n+1)) - (1 + 2n) = 1 + 2 + 2n - 1 - 2n = 2$$

$$2 = 2 - 0 = 2 - 0 = 2 - 0 = 2 - 0$$

$$\therefore (u_n) = (1 + 2n) \text{ متتابعة حسابية وأساسها } 2 = 2$$

$$2 > 0 \text{ (موجبة)} \therefore \text{المتتابعة متزايدة}$$

$$2) u_{n+1} - u_n = (2 - 2(n+1)) - (2 - 2n) = 2 - 2 - 2n - 2 + 2n = -2$$

$$-2 = -2 - 0 = -2 - 0 = -2 - 0 = -2 - 0$$

$$\therefore (u_n) = (2 - 2n) \text{ متتابعة غير حسابية}$$

$$③ \quad [0 \cdot 3 - 2] - [(1 + 0) \cdot 2 - 2] = 0 \cdot 2 - 1 + 0 \cdot 2$$

$$= 3 - 2 = 0 \cdot 3 + 2 - 3 - 0 \cdot 2 - 2 =$$

$$\therefore (0 \cdot 3 - 2) = (0 \cdot 2) \text{ متتابعة حسابية وأساسها } 3 - 2 = 1$$

$\therefore 1 > 0$ (سالبة) \therefore المتتابعة متناقصة

$$④ \quad \left[2 + \frac{1}{0}\right] - \left[2 + \frac{1}{1+0}\right] = 0 \cdot 2 - 1 + 0 \cdot 2$$

$$2 - \frac{1}{0} - 2 + \frac{1}{1+0} =$$

$$\frac{1-}{(1+0) \cdot 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{1+0} =$$

وهذا المقدار غير ثابت لأنه يعتمد على قيمة 0

$\therefore (2 + \frac{1}{0}) - (0 \cdot 2)$ ليست متتابعة حسابية

⑤ التمثيل البياني للمتتابعة الحسابية

لتمثيل متتابعة حسابية ولتكن $(10, 8, 6, 4, 2)$

فإننا نلاحظ أن مجال المتتابعة (كما علمنا من الدرس الأول)

$$\text{هو } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

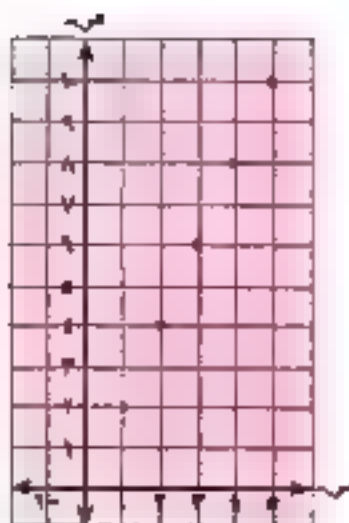
وتكون الأزواج المرتبة المثلثة لمتتابعة هي :

$$\{(10, 0), (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$$

ويمكن تمثيلها كما بالشكل المقابل ويكون

هذا الشكل هو التمثيل البياني للمتتابعة

$(10, 8, 6, 4, 2)$ ونلاحظ من الشكل أن :



النقط التي تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يعنى أن المتتابعة

الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في n حيث $u \in \mathbb{N}^+$ وهو المتغير المستقل و u

حيث $u \in \mathbb{N}$ هو المتغير التابع ويكون معامل u هو أساس المتتابعة أي أن العلاقة بين

المتغيرين u ، u هي $u = u + u$ حيث u ، u ثابتان ، و أساس المتتابعة.

١- الحد النوني (الحد العام) للمتتابعة

إذا كانت (u_n) متتابعة حسابية حدها الأول u_1 وأساسها d فإن $u_n = u_1 + (n-1)d$ وكل حد يربط
عن السابق له بمقدار d

أي أن $u_2 = u_1 + d$ ، $u_3 = u_2 + d$ ، $u_4 = u_3 + d$ ، $u_5 = u_4 + d$ ، وهكذا
ونلاحظ من ذلك أن معامل d يقل بمقدار d لوحدة عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

فمثلاً $u_6 = u_5 + d$ ، $u_{10} = u_9 + d$ ، وهكذا

وبالتستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النوني لهذه المتتابعة هو $u_n = u_1 + (n-1)d$
ومن ذلك يمكن تعريف الحد النوني كما يلي :

الحد النوني للمتتابعة الحسابية

إذا رمزنا للحد الأول u_1 بالترميز u وللأساس بالترميز d فإن u_n
(أي الحد الذي رتبته n) يسمى الحد النوني أو الحد العام للمتتابعة الحسابية

حيث $u_n = u_1 + (n-1)d$ حيث $n \geq 1$ ، $d \neq 0$ ، u رتبة الحد.

وإذا كان عدد حدود المتتابعة الحسابية n فإن حدها الأخير u_n يرمز له بالرمز l

$$l = u_1 + (n-1)d$$

وإذا كتبنا بعض حدود المتتابعة وذلك بوضع $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ في الحد العام للمتتابعة
الحسابية فإننا نحصل على المتتابعة $(u_1, u_2, u_3, u_4, \dots)$ وتسمى هذه
الصورة بالصورة العامة للمتتابعة الحسابية التي حدها الأول u وأساسها d

٢- تعيين المتتابعة الحسابية

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول والأساس

فمثلاً إذا كان حدها الأول $u_1 = 2$ والأساس $d = 3$

فإن المتتابعة هي $(2, 5, 8, 11, \dots)$

٣- استخدام الآلة الحاسبة العلمية للكتابة المتتابعة حسابية

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة المتتابعة السابقة كما يلي :

١- نكتب قيمة u (العدد ٢) ثم نضغط علامة $=$

٢- نضع قيمة d بالضغط على $+$ ثم (العدد ٣) ونضغط علامة $=$ فنحصل على الحد
الثاني للمتتابعة.

أي يكون الضغط على الأزرار بالتتابع الآتي: $\boxed{2} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{2} \boxed{=}$

لاحظ الفرق بين (ع) و (ح) حيث (ح) ترمز للمتابعة بينما (ع) ترمز للحدوث البشري للمتابعة.

للإيجاء رتبة أول حد مالي في المتابعة الحسابية نوجد أصغر عدد صحيح موجب

لإيجاد رتبة آخر حد موجب في المتتابعة الحسابية توجد أكبر عدد صحيح

٢٠ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معينة S في متتابعة متزايدة

٢٠٤٢ مكان أساس المتتابعة (و < ٥) كانت المتتابعة لزايدية.

وإذا كان أساس المتتابعة (u_n) مكائن المتتابعة العالمية.

في المتابعة الحسابية الآتية (٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٧، ١٠٨، ١٠٩، ١١٠، ١١١، ١١٢، ١١٣، ١١٤، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١١٩، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٣، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠، ١٣١، ١٣٢، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٧، ١٣٨، ١٣٩، ١٤٠، ١٤١، ١٤٢، ١٤٣، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٧، ١٤٨، ١٤٩، ١٥٠، ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٧، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦١، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٠، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٦، ١٧٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٨٠، ١٨١، ١٨٢، ١٨٣، ١٨٤، ١٨٥، ١٨٦، ١٨٧، ١٨٨، ١٨٩، ١٩٠، ١٩١، ١٩٢، ١٩٣، ١٩٤، ١٩٥، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٢، ٢٠٣، ٢٠٤، ٢٠٥، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٤، ٢١٥، ٢١٦، ٢١٧، ٢١٨، ٢١٩، ٢٢٠، ٢٢١، ٢٢٢، ٢٢٣، ٢٢٤، ٢٢٥، ٢٢٦، ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣٠، ٢٣١، ٢٣٢، ٢٣٣، ٢٣٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٧، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٤٠، ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠، ٢٥١، ٢٥٢، ٢٥٣، ٢٥٤، ٢٥٥، ٢٥٦، ٢٥٧، ٢٥٨، ٢٥٩، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧٢، ٢٧٣، ٢٧٤، ٢٧٥، ٢٧٦، ٢٧٧، ٢٧٨، ٢٧٩، ٢٨٠، ٢٨١، ٢٨٢، ٢٨٣، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٨٦، ٢٨٧، ٢٨٨، ٢٨٩، ٢٩٠، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٣، ٢٩٤، ٢٩٥، ٢٩٦، ٢٩٧، ٢٩٨، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٣، ٣٠٤، ٣٠٥، ٣٠٦، ٣٠٧، ٣٠٨، ٣٠٩، ٣١٠، ٣١١، ٣١٢، ٣١٣، ٣١٤، ٣١٥، ٣١٦، ٣١٧، ٣١٨، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢١، ٣٢٢، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٣٠، ٣٣١، ٣٣٢، ٣٣٣، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٦، ٣٣٧، ٣٣٨، ٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١، ٣٤٢، ٣٤٣، ٣٤٤، ٣٤٥، ٣٤٦، ٣٤٧، ٣٤٨، ٣٤٩، ٣٥٠، ٣٥١، ٣٥٢، ٣٥٣، ٣٥٤، ٣٥٥، ٣٥٦، ٣٥٧، ٣٥٨، ٣٥٩، ٣٦٠، ٣٦١، ٣٦٢، ٣٦٣، ٣٦٤، ٣٦٥، ٣٦٦، ٣٦٧، ٣٦٨، ٣٦٩، ٣٧٠، ٣٧١، ٣٧٢، ٣٧٣، ٣٧٤، ٣٧٥، ٣٧٦، ٣٧٧، ٣٧٨، ٣٧٩، ٣٨٠، ٣٨١، ٣٨٢، ٣٨٣، ٣٨٤، ٣٨٥، ٣٨٦، ٣٨٧، ٣٨٨، ٣٨٩، ٣٩٠، ٣٩١، ٣٩٢، ٣٩٣، ٣٩٤، ٣٩٥، ٣٩٦، ٣٩٧، ٣٩٨، ٣٩٩، ٤٠٠، ٤٠١، ٤٠٢، ٤٠٣، ٤٠٤، ٤٠٥، ٤٠٦، ٤٠٧، ٤٠٨، ٤٠٩، ٤١٠، ٤١١، ٤١٢، ٤١٣، ٤١٤، ٤١٥، ٤١٦، ٤١٧، ٤١٨، ٤١٩، ٤٢٠، ٤٢١، ٤٢٢، ٤٢٣، ٤٢٤، ٤٢٥، ٤٢٦، ٤٢٧، ٤٢٨، ٤٢٩، ٤٣٠، ٤٣١، ٤٣٢، ٤٣٣، ٤٣٤، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٣٧، ٤٣٨، ٤٣٩، ٤٤٠، ٤٤١، ٤٤٢، ٤٤٣، ٤٤٤، ٤٤٥، ٤٤٦، ٤٤٧، ٤٤٨، ٤٤٩، ٤٥٠، ٤٥١، ٤٥٢، ٤٥٣، ٤٥٤، ٤٥٥، ٤٥٦، ٤٥٧، ٤٥٨، ٤٥٩، ٤٦٠، ٤٦١، ٤٦٢، ٤٦٣، ٤٦٤، ٤٦٥، ٤٦٦، ٤٦٧، ٤٦٨، ٤٦٩، ٤٧٠، ٤٧١، ٤٧٢، ٤٧٣، ٤٧٤، ٤٧٥، ٤٧٦، ٤٧٧، ٤٧٨، ٤٧٩، ٤٨٠، ٤٨١، ٤٨٢، ٤٨٣، ٤٨٤، ٤٨٥، ٤٨٦، ٤٨٧، ٤٨٨، ٤٨٩، ٤٩٠، ٤٩١، ٤٩٢، ٤٩٣، ٤٩٤، ٤٩٥، ٤٩٦، ٤٩٧، ٤٩٨، ٤٩٩، ٥٠٠، ٥٠١، ٥٠٢، ٥٠٣، ٥٠٤، ٥٠٥، ٥٠٦، ٥٠٧، ٥٠٨، ٥٠٩، ٥١٠، ٥١١، ٥١٢، ٥١٣، ٥١٤، ٥١٥، ٥١٦، ٥١٧، ٥١٨، ٥١٩، ٥٢٠، ٥٢١، ٥٢٢، ٥٢٣، ٥٢٤، ٥٢٥، ٥٢٦، ٥٢٧، ٥٢٨، ٥٢٩، ٥٣٠، ٥٣١، ٥٣٢، ٥٣٣، ٥٣٤، ٥٣٥، ٥٣٦، ٥٣٧، ٥٣٨، ٥٣

۲) رتبه اول حد تزید قیمته من ۹۸

$$y = y - a = s \quad (y = 1)$$

① قيمة x : $23 = 2 \times 12 + x = 24 + x$

٢) نفرض أن الحد الذي قيمته = ٣ هو ج.

$$E^* = \int (1-u) + \frac{1}{2} \quad E^* = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_Y = Y - UY + Y^2 \therefore \quad \sigma_Y = Y \times (1 - U) + Y^2 \therefore$$

$$\partial Y = \cup Y, \quad \mathcal{F} - Y + \partial Y = \cup Y.$$

$$P_1 = 0.1$$

٦. وقبة الحد الذي قيمته ٥٣ هي ٢٦ (أي أن $c_{53} = 26$)

$$19 = 1 + 12 + 32 = 1 \times 12 + 32 = 19 \quad \text{ع ٢}$$

٣ لإيجاد ع من النهاية فإن المتتابعة تكون معكوسة وتصبح $1 + 5 + 72 = 78$

$$19 = 1 + 12 + 32 = 1 \times 12 + 32 = 19 \quad \text{ع ٢}$$

٤ لإيجاد عدد حدود المتتابعة نوجد رتبة آخر حد فيها

$$1 - x(1 - u) + 32 = 72 \quad \therefore \quad 1 - (1 - u) = 40$$

$$32 = 72 - 40 \quad \therefore \quad 1 + u - 32 = 72 - 40$$

\therefore عند حدود المتتابعة $32 = 72 - 40$

$$32 = 72 - 40 \quad \therefore \quad 19 = 1 + \frac{32 - 72}{4} = 1 + \frac{1 - u}{4} = u \quad \text{حل آخر}$$

مثال

متتابعة حسابية فيها $10 = 10$ ، $20 = 10 + 10$ ، $30 = 10 + 10 + 10$ أوجد المتتابعة وأوجد رتبة آخر حد موجب فيها ، وإذا كان 30 أحد حدود هذه المتتابعة فما رتبته .

الحل

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$30 = 10 \times 3 \quad \therefore$$

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$1 \rightarrow 30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$2 \rightarrow 30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

ويحل المعادلتين ١ ، ٢ :

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore \quad \text{بالمضروب } 3 \text{ والجمع}$$

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

وبالتعويض في المعادلة ٢ :

$$30 = 10 + 10 + 10 \quad \therefore$$

\therefore المتتابعة هي $(10, 20, 30, 40, 50, \dots)$

لإيجاد رتبة آخر حد موجب فيها نفرض أن $n < 0$

$$1 < 4 - x(1 - u) + 25 \therefore$$

$$29 - < u4 - \therefore$$

$$1 < 4(1 - u) + 25 \therefore$$

$$1 < 4 + u4 - 25 \therefore$$

$$21 > u4 \therefore$$

أخرج حد موجب هو u

لايجاد رتبة الحد الذي قيمته $25 -$ نعرض أن $u = 25 -$

$$25 - = 4 - x(1 - u) + 25 \therefore$$

$$25 - = 4(1 - u) + 25 \therefore$$

$$16 = u4 \therefore$$

$$25 - = 4 + u4 - 25 \therefore$$

$$\text{حل آخر } u = \frac{25 - 25 -}{4 -} = 1 + 16 = 17$$

$$25 - = 16 \therefore$$

يمكن استخدام آلة الحاسبة فتأكد من صحة حل المعادلتين

$$2 - = 17 + 16 \quad 20 - 50 + 12$$

بإتباع الخطوات التالية ،

1 اضغط على مفتاح العمليات **Mode** ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم

المكتوب امامها وغالباً 5 أو 3 في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية $ax + by = c$

وذلك بالضغط على المفتاح **1**

2 ندخل معاملات (a) ، (b) والحد المطلق بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية

مباشرة ونضغط على الأزوار من اليسار إلى اليمين مباشرة على النحو التالي :

أبدأ \rightarrow **2** **=** **5** **=** **3** **0** **=** **1** **=** **7** **=** **3** **=** **2**

3 الاستدعاء النتائج ،

نضغط على المفتاح **=** للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول x ويكون الناتج $x = 25$

ثم نضغط على المفتاح **=** مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثاني y ويكون الناتج $y = 4$

الخروج من البرنامج نضغط على مفتاح **1** **Mode** أبدأ \rightarrow

مثال ٤

إذا كان مجموع الحد الثالث والحد الخامس من متتابعة حسابية هو ١٦ وحاصل ضرب حدها الثاني في حدها السادس = ٤٨ فأوجد المتتابعة

الحل

$$16 = 3a + 1 + 5a + 1 \therefore$$

$$8 = 3a + 1 \therefore$$

①

$$16 = 2a + 2 \therefore$$

$$16 = 2a + 2 \therefore$$

$$14 = 2a \therefore$$

$$7 = a \therefore$$

$$② \leftarrow 48 = (3a + 1)(5a + 1) \therefore$$

وبالتعويض من ① في المعادلة ② :

$$48 = (3 \times 7 + 1)(5 \times 7 + 1) \therefore$$

$$48 = 28 \times 36 \therefore$$

$$28 \neq 36 \therefore$$

$$48 = (2a + 2)(5a + 1) \therefore$$

$$24 = 5a + 1 \therefore$$

وبالتعويض في المعادلة ① :

$$16 = 3a + 1 \therefore$$

$$15 = 3a \therefore$$

$$5 = a \therefore$$

\therefore يوجد متابعتان الأولى هي (٢، ٧، ١٢، ١٧، ٢٢، ...) والثانية هي (١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥، ...)

مثال ٥

إذا كانت (١، ٢، ٣، ...، ب، ٣٩) متتابعة حسابية وكانت ب = ٤٤ فأوجد قيمة كل من ب، ب وكذا رتبة حدها الأخير

الحل

$$27 + 1 = 28 \therefore$$

$$27 = 28 \therefore$$

$$36 = 28 \therefore$$

$$28 - 39 = 11 = 5 \therefore$$

$$27 + 1 = 28 \therefore$$

$$27 + 9 = 36 \therefore$$

$$3 = 5 \therefore$$

\therefore المتتابعة حسابية

$$1 = 28 \therefore$$

$$9 = 28 \therefore$$

$$9 - 12 = 3 \therefore$$

\therefore الحد الأخير = ٣٩ ، $1 = 28$ ، $3 = 5$ ، $1(1 - 5) + 1 = 28$

$$3 - 5 \times 3 + 9 = 39 \therefore 3 \times (1 - 5) + 9 = 39 \therefore$$

$$11 = 5 \therefore 3 + 9 - 39 = 27 \therefore$$

\therefore الحد الأخير هو ١١

مثال

ثلاث أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣
أوجد هذه الأعداد.

الحل

دلائل

في جميع المعادلات التي يدكر فيها
مجموع ثلاث حدود في متتابعة
حسابية نفرض أن الحدود
 $x, x+d, x+2d$
وإذا كان x حدود نفرضها
 $x, x+d, x+2d$
وهكذا لتسهيل الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة التي تكون المتتابعة هي :

$$x, x+d, x+2d \quad \therefore x + (x+d) + (x+2d) = 15$$

$$x = 1 \quad \therefore x+2d = 13$$

$$\therefore 93 = x^2 + (x+d)^2 + (x+2d)^2$$

$$\therefore 93 = x^2 + x^2 + 2xd + d^2 + x^2 + 4xd + 4d^2$$

$$\therefore 93 = 3x^2 + 6xd + 5d^2$$

$$\therefore 93 = 3(1)^2 + 6(1)d + 5d^2$$

$$\therefore 3 = 1 + 6d + 5d^2$$

$$\therefore 2 = 6d + 5d^2$$

$$\therefore 2 = 6d + 5d^2$$

$$\therefore \text{الأعداد هي } 1, 4, 10$$

$$\therefore \text{الأعداد هي } 1, 4, 10$$

مثال

أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١ في المتتابعة الحسابية (١٣، ١٧، ٢١، ...)

الحل

لمعرفة ما إذا كان يوجد حد قيمته ١٥١ أم لا فإننا نوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥١

فإذا كانت عدد صحيح موجب فهذا يعني أنه يوجد حد قيمته ١٥١

أما إذا كانت رتبة الحد (n) سالبة أو كسرية فهذا معناه أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١

$$\therefore 13 = 1, 17 = 2, 21 = 3$$

$$\therefore \text{لايجاد قيمة } n \text{ نفرض أن } 151 = n$$

$$\therefore 151 = 13 + (n-1) \times 4$$

$$\therefore 151 = 13 + 4(n-1)$$

$$\therefore 151 - 13 = 4(n-1)$$

$$\therefore 151 = 13 + 4(n-1)$$

$$\therefore 151 - 13 = 4(n-1)$$

$$\therefore 151 = 13 + 4(n-1)$$

$$\therefore \text{لا يوجد حد قيمته ١٥١}$$

تمارين

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى



المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

المادة الأولى: المادة الأولى

مسائل المستوى الأول

حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية وأياها غير حسابية ثم أوجد الأساس في حالة
كونها حسابية :

(YA CYC YG YD YH) (2) (YEC YIC YAC YD YH) (1)

(Y6Y6Y6Y6Y) (Y9-CY3-C1Y-C1Y-C0-)

⑤ (س ۱ + س ۲ + س ۳ + س ۴ + س ۵) (حدیث سے) حکمیتان موجبتان

٣ اكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية في كل من الحالات الآتية :

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ e } 1 = 1 \text{ (2)} \quad 1 = 1 \text{ e } 1 = 1 \text{ (2)} \quad 0 = 1 \text{ e } 1 = 1 \text{ (1)}$$

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① تعمى، المتتابعة (ع) متتابعة حسابية إذا كان $u_n - u_{n-1} = c$

$\left[\begin{array}{l} < \text{مقدار ثابت} \\ = \text{مقدار ثابت} \\ > \text{مقدار ثابت} \end{array} \right] = \text{صفر}$

٢) أساس المتتابعة الحسابية و $u_n = 2n + 1$

$$\left[1 + u^2 \quad u^2 - 1 + u^2 \quad \frac{u^2}{1 + u^2} \quad \frac{1 + u^2}{u^2} \right]$$

$$[s(1+u) \text{ अ } (1-u) \text{ अ } s \text{ अ } s(1-u)] \dots + 1 = uZ \text{ ३}$$

① $(\sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})$ متتابعة حسابية فإن :

[▲ ♠ ♣ ♤ ♥ ♦]

اولاً اساسها

[० १ २ ३ ४ ५]

ثانيًا - حدها الأول = $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

٥ الحد السابع للمقتبعة الحسابية (٤٨٤٥٤٢) هو

[T: 4 W: 4 M: 4 H: 4]

⑥ الحد الحادي عشر من المتتابعة (ع) حيث $u_3 - u_2 = 5$ هو

[၇ ၄ ၃၃ ၄ ၃၈ ၄ ၃၀]

٧) الحد التولي للمتابعة الحسابية (٨١، ٧٧، ٧٣، ٧٠) هو $\frac{1}{2}$.

$$[A_0 - U \quad d \quad U_1 - A_0 \quad d \quad A_0 + U_1 \quad d \quad A_0 - U_1]$$

٨) الحد الثموني للمتتالية الحسابية $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{صفر}, \dots)$ هو $\dots = \dots$

$$[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{d} \quad \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \quad \text{d} \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{d} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4}]$$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) $(\text{ج}) = (5 - 3) = \dots$ متتالية حسابية أساسها $\dots = \dots$

$$[2 \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 3 \quad \text{d} \quad 5]$$

٢) الحد الثموني للمتتالية الحسابية $(2, 4, 8, 16, \dots)$ هو $\dots = \dots$

$$[3 - \quad \text{d} \quad 1 - \quad \text{d} \quad 1 - \quad \text{d} \quad 1 + \quad \text{d} \quad 3]$$

٣) عدد حدود المتتالية $(2, 4, 8, \dots, 128)$ هو \dots

$$[12 \quad \text{d} \quad 6 \quad \text{d} \quad 5 \quad \text{d} \quad 4]$$

٤) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتالية \dots

$$[\dots \quad \text{d} \quad (\dots, 10, 11, 12, \dots) \quad \text{d} \quad (\dots, 19, 18, 17, \dots, 23)]$$

$$[(\dots, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}, \frac{19}{5}, \frac{27}{5}) \quad \text{d} \quad (\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7})]$$

٥) المتتالية الحسابية من بين المتتابعات الآتية هي \dots

$$[\dots \quad \text{d} \quad (1 + \dots) = (\text{ج}) \quad \text{d} \quad (\frac{1 + \dots}{\dots}) = (\text{ج})]$$

$$[(\frac{1 - \dots}{1 + \dots + \dots}) = (\text{ج}) \quad \text{d} \quad ((2 + \dots) \frac{3}{\dots}) = (\text{ج})]$$

٦) أوجد:

١) قيمة الحد السابع من المتتالية الحسابية $(2, 4, 8, 16, \dots)$ $[20]$

٢) $\text{ج}, \text{ج}, \text{ج}, \text{ج}$ من المتتالية الحسابية $(3, 6, 9, \dots)$ $[58, 74, 117]$

٧) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الخامس عشر = 10 فإن حدها الأول \dots

$$[4 - \quad \text{d} \quad 16 \quad \text{d} \quad 10 \quad \text{d} \quad 4 -]$$

٢) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها التاسع = 21 فإن حدها الأول \dots

$$[3 \quad \text{d} \quad \text{صفر} \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 18]$$

٣) متتالية حسابية حدها الأول = 21 وحدها العشرون = 36 فإن هو أساسها \dots

$$[9 \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 3 \quad \text{d} \quad \text{صفر}]$$

الثالث مسائل المستوى الثاني

٨) ١) بين أن المتتابعة $(ع_n)$ $1 + 2 + \dots + n$ تكون متتابعة حسابية ثم أوجد قيمة حدها الثامن. [٣]

٢) أثبت أن المتتابعة $(ع_n)$ $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n+1}n$ هي متتابعة حسابية وأوجد أساسها ثم

اكتب الأربعة حدود الأولى منها. [١-١٩١٣(٥)٤٦-]

٩) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية $(١٧, ١٤, ١١, ٨, ٥, ٢, -١, -٤, -٧, -١٠, -١٣, -١٦, -١٩, -٢٢, -٢٥, -٢٨, -٣١, -٣٤, -٣٧, -٤٠, -٤٣, -٤٦, -٤٩, -٥٢, -٥٥, -٥٨, -٦١, -٦٤, -٦٧, -٧٠, -٧٣, -٧٦, -٧٩, -٨٢, -٨٥, -٨٨, -٩١, -٩٤, -٩٧, -١٠٠, -١٠٣, -١٠٦, -١٠٩, -١١٢, -١١٥, -١١٨, -١٢١, -١٢٤, -١٢٧, -١٣٠, -١٣٣, -١٣٦, -١٣٩, -١٤٢, -١٤٥, -١٤٨, -١٥١, -١٥٤, -١٥٧, -١٦٠, -١٦٣, -١٦٦, -١٦٩, -١٧٢, -١٧٥, -١٧٨, -١٨١, -١٨٤, -١٨٧, -١٩٠, -١٩٣, -١٩٦, -١٩٩, -٢٠٢, -٢٠٥, -٢٠٨, -٢١١, -٢١٤, -٢١٧, -٢٢٠, -٢٢٣, -٢٢٦, -٢٢٩, -٢٣٢, -٢٣٥, -٢٣٨, -٢٤١, -٢٤٤, -٢٤٧, -٢٥٠, -٢٥٣, -٢٥٦, -٢٥٩, -٢٦٢, -٢٦٥, -٢٦٨, -٢٧١, -٢٧٤, -٢٧٧, -٢٨٠, -٢٨٣, -٢٨٦, -٢٨٩, -٢٩٢, -٢٩٥, -٢٩٨, -٣٠١, -٣٠٤, -٣٠٧, -٣١٠, -٣١٣, -٣١٦, -٣١٩, -٣٢٢, -٣٢٥, -٣٢٨, -٣٣١, -٣٣٤, -٣٣٧, -٣٤٠, -٣٤٣, -٣٤٦, -٣٤٩, -٣٥٢, -٣٥٥, -٣٥٨, -٣٦١, -٣٦٤, -٣٦٧, -٣٧٠, -٣٧٣, -٣٧٦, -٣٧٩, -٣٨٢, -٣٨٥, -٣٨٨, -٣٩١, -٣٩٤, -٣٩٧, -٤٠٠, -٤٠٣, -٤٠٦, -٤٠٩, -٤١٢, -٤١٥, -٤١٨, -٤٢١, -٤٢٤, -٤٢٧, -٤٣٠, -٤٣٣, -٤٣٦, -٤٣٩, -٤٤٢, -٤٤٥, -٤٤٨, -٤٥١, -٤٥٤, -٤٥٧, -٤٦٠, -٤٦٣, -٤٦٦, -٤٦٩, -٤٧٢, -٤٧٥, -٤٧٨, -٤٨١, -٤٨٤, -٤٨٧, -٤٩٠, -٤٩٣, -٤٩٦, -٤٩٩, -٥٠٢, -٥٠٥, -٥٠٨, -٥١١, -٥١٤, -٥١٧, -٥٢٠, -٥٢٣, -٥٢٦, -٥٢٩, -٥٣٢, -٥٣٥, -٥٣٨, -٥٤١, -٥٤٤, -٥٤٧, -٥٥٠, -٥٥٣, -٥٥٦, -٥٥٩, -٥٦٢, -٥٦٥, -٥٦٨, -٥٧١, -٥٧٤, -٥٧٧, -٥٨٠, -٥٨٣, -٥٨٦, -٥٨٩, -٥٩٢, -٥٩٥, -٥٩٨, -٦٠١, -٦٠٤, -٦٠٧, -٦١٠, -٦١٣, -٦١٦, -٦١٩, -٦٢٢, -٦٢٥, -٦٢٨, -٦٣١, -٦٣٤, -٦٣٧, -٦٤٠, -٦٤٣, -٦٤٦, -٦٤٩, -٦٥٢, -٦٥٥, -٦٥٨, -٦٦١, -٦٦٤, -٦٦٧, -٦٧٠, -٦٧٣, -٦٧٦, -٦٧٩, -٦٨٢, -٦٨٥, -٦٨٨, -٦٩١, -٦٩٤, -٦٩٧, -٦٩٩, -٧٠٢, -٧٠٥, -٧٠٨, -٧١١, -٧١٤, -٧١٧, -٧٢٠, -٧٢٣, -٧٢٦, -٧٢٩, -٧٣٢, -٧٣٥, -٧٣٨, -٧٤١, -٧٤٤, -٧٤٧, -٧٥٠, -٧٥٣, -٧٥٦, -٧٥٩, -٧٦٢, -٧٦٥, -٧٦٨, -٧٧١, -٧٧٤, -٧٧٧, -٧٨٠, -٧٨٣, -٧٨٦, -٧٨٩, -٧٩٢, -٧٩٥, -٧٩٨, -٨٠١, -٨٠٤, -٨٠٧, -٨١٠, -٨١٣, -٨١٦, -٨١٩, -٨٢٢, -٨٢٥, -٨٢٨, -٨٣١, -٨٣٤, -٨٣٧, -٨٤٠, -٨٤٣, -٨٤٦, -٨٤٩, -٨٥٢, -٨٥٥, -٨٥٨, -٨٦١, -٨٦٤, -٨٦٧, -٨٧٠, -٨٧٣, -٨٧٦, -٨٧٩, -٨٨٢, -٨٨٥, -٨٨٨, -٨٩١, -٨٩٤, -٨٩٧, -٩٠٠, -٩٠٣, -٩٠٦, -٩٠٩, -٩١٢, -٩١٥, -٩١٨, -٩٢١, -٩٢٤, -٩٢٧, -٩٣٠, -٩٣٣, -٩٣٦, -٩٣٩, -٩٤٢, -٩٤٥, -٩٤٨, -٩٥١, -٩٥٤, -٩٥٧, -٩٦٠, -٩٦٣, -٩٦٦, -٩٦٩, -٩٧٢, -٩٧٥, -٩٧٨, -٩٨١, -٩٨٤, -٩٨٧, -٩٩٠, -٩٩٣, -٩٩٦, -٩٩٩, -١٠٠٢, -١٠٠٥, -١٠٠٨, -١٠١١, -١٠١٤, -١٠١٧, -١٠٢٠, -١٠٢٣, -١٠٢٦, -١٠٢٩, -١٠٣٢, -١٠٣٥, -١٠٣٨, -١٠٤١, -١٠٤٤, -١٠٤٧, -١٠٥٠, -١٠٥٣, -١٠٥٦, -١٠٥٩, -١٠٦٢, -١٠٦٥, -١٠٦٨, -١٠٧١, -١٠٧٤, -١٠٧٧, -١٠٨٠, -١٠٨٣, -١٠٨٦, -١٠٨٩, -١٠٩٢, -١٠٩٥, -١٠٩٨, -١١٠١, -١١٠٤, -١١٠٧, -١١١٠, -١١١٣, -١١١٦, -١١١٩, -١١٢٢, -١١٢٥, -١١٢٨, -١١٣١, -١١٣٤, -١١٣٧, -١١٤٠, -١١٤٣, -١١٤٦, -١١٤٩, -١١٥٢, -١١٥٥, -١١٥٨, -١١٦١, -١١٦٤, -١١٦٧, -١١٧٠, -١١٧٣, -١١٧٦, -١١٧٩, -١١٨٢, -١١٨٥, -١١٨٨, -١١٩١, -١١٩٤, -١١٩٧, -١٢٠٠, -١٢٠٣, -١٢٠٦, -١٢٠٩, -١٢١٢, -١٢١٥, -١٢١٨, -١٢٢١, -١٢٢٤, -١٢٢٧, -١٢٣٠, -١٢٣٣, -١٢٣٦, -١٢٣٩, -١٢٤٢, -١٢٤٥, -١٢٤٨, -١٢٥١, -١٢٥٤, -١٢٥٧, -١٢٦٠, -١٢٦٣, -١٢٦٦, -١٢٦٩, -١٢٧٢, -١٢٧٥, -١٢٧٨, -١٢٨١, -١٢٨٤, -١٢٨٧, -١٢٩٠, -١٢٩٣, -١٢٩٦, -١٢٩٩, -١٣٠٢, -١٣٠٥, -١٣٠٨, -١٣١١, -١٣١٤, -١٣١٧, -١٣٢٠, -١٣٢٣, -١٣٢٦, -١٣٢٩, -١٣٣٢, -١٣٣٥, -١٣٣٨, -١٣٤١, -١٣٤٤, -١٣٤٧, -١٣٥٠, -١٣٥٣, -١٣٥٦, -١٣٥٩, -١٣٦٢, -١٣٦٥, -١٣٦٨, -١٣٧١, -١٣٧٤, -١٣٧٧, -١٣٨٠, -١٣٨٣, -١٣٨٦, -١٣٨٩, -١٣٩٢, -١٣٩٥, -١٣٩٨, -١٤٠١, -١٤٠٤, -١٤٠٧, -١٤١٠, -١٤١٣, -١٤١٦, -١٤١٩, -١٤٢٢, -١٤٢٥, -١٤٢٨, -١٤٣١, -١٤٣٤, -١٤٣٧, -١٤٤٠, -١٤٤٣, -١٤٤٦, -١٤٤٩, -١٤٥٢, -١٤٥٥, -١٤٥٨, -١٤٦١, -١٤٦٤, -١٤٦٧, -١٤٧٠, -١٤٧٣, -١٤٧٦, -١٤٧٩, -١٤٨٢, -١٤٨٥, -١٤٨٨, -١٤٩١, -١٤٩٤, -١٤٩٧, -١٥٠٠, -١٥٠٣, -١٥٠٦, -١٥٠٩, -١٥١٢, -١٥١٥, -١٥١٨, -١٥٢١, -١٥٢٤, -١٥٢٧, -١٥٣٠, -١٥٣٣, -١٥٣٦, -١٥٣٩, -١٥٤٢, -١٥٤٥, -١٥٤٨, -١٥٥١, -١٥٥٤, -١٥٥٧, -١٥٦٠, -١٥٦٣, -١٥٦٦, -١٥٦٩, -١٥٧٢, -١٥٧٥, -١٥٧٨, -١٥٨١, -١٥٨٤, -١٥٨٧, -١٥٩٠, -١٥٩٣, -١٥٩٦, -١٥٩٩, -١٦٠٢, -١٦٠٥, -١٦٠٨, -١٦١١, -١٦١٤, -١٦١٧, -١٦٢٠, -١٦٢٣, -١٦٢٦, -١٦٢٩, -١٦٣٢, -١٦٣٥, -١٦٣٨, -١٦٤١, -١٦٤٤, -١٦٤٧, -١٦٥٠, -١٦٥٣, -١٦٥٦, -١٦٥٩, -١٦٦٢, -١٦٦٥, -١٦٦٨, -١٦٧١, -١٦٧٤, -١٦٧٧, -١٦٨٠, -١٦٨٣, -١٦٨٦, -١٦٨٩, -١٦٩٢, -١٦٩٥, -١٦٩٨, -١٧٠١, -١٧٠٤, -١٧٠٧, -١٧١٠, -١٧١٣, -١٧١٦, -١٧١٩, -١٧٢٢, -١٧٢٥, -١٧٢٨, -١٧٣١, -١٧٣٤, -١٧٣٧, -١٧٤٠, -١٧٤٣, -١٧٤٦, -١٧٤٩, -١٧٥٢, -١٧٥٥, -١٧٥٨, -١٧٦١, -١٧٦٤, -١٧٦٧, -١٧٧٠, -١٧٧٣, -١٧٧٦, -١٧٧٩, -١٧٨٢, -١٧٨٥, -١٧٨٨, -١٧٩١, -١٧٩٤, -١٧٩٧, -١٨٠٠, -١٨٠٣, -١٨٠٦, -١٨٠٩, -١٨١٢, -١٨١٥, -١٨١٨, -١٨٢١, -١٨٢٤, -١٨٢٧, -١٨٣٠, -١٨٣٣, -١٨٣٦, -١٨٣٩, -١٨٤٢, -١٨٤٥, -١٨٤٨, -١٨٥١, -١٨٥٤, -١٨٥٧, -١٨٦٠, -١٨٦٣, -١٨٦٦, -١٨٦٩, -١٨٧٢, -١٨٧٥, -١٨٧٨, -١٨٨١, -١٨٨٤, -١٨٨٧, -١٨٩٠, -١٨٩٣, -١٨٩٦, -١٨٩٩, -١٩٠٢, -١٩٠٥, -١٩٠٨, -١٩١١, -١٩١٤, -١٩١٧, -١٩٢٠, -١٩٢٣, -١٩٢٦, -١٩٢٩, -١٩٣٢, -١٩٣٥, -١٩٣٨, -١٩٤١, -١٩٤٤, -١٩٤٧, -١٩٥٠, -١٩٥٣, -١٩٥٦, -١٩٥٩, -١٩٦٢, -١٩٦٥, -١٩٦٨, -١٩٧١, -١٩٧٤, -١٩٧٧, -١٩٨٠, -١٩٨٣, -١٩٨٦, -١٩٨٩, -١٩٩٢, -١٩٩٥, -١٩٩٨, -٢٠٠١, -٢٠٠٤, -٢٠٠٧, -٢٠١٠, -٢٠١٣, -٢٠١٦, -٢٠١٩, -٢٠٢٢, -٢٠٢٥, -٢٠٢٨, -٢٠٣١, -٢٠٣٤, -٢٠٣٧, -٢٠٤٠, -٢٠٤٣, -٢٠٤٦, -٢٠٤٩, -٢٠٥٢, -٢٠٥٥, -٢٠٥٨, -٢٠٦١, -٢٠٦٤, -٢٠٦٧, -٢٠٧٠, -٢٠٧٣, -٢٠٧٦, -٢٠٧٩, -٢٠٨٢, -٢٠٨٥, -٢٠٨٨, -٢٠٩١, -٢٠٩٤, -٢٠٩٧, -٢١٠٠, -٢١٠٣, -٢١٠٦, -٢١٠٩, -٢١١٢, -٢١١٥, -٢١١٨, -٢١٢١, -٢١٢٤, -٢١٢٧, -٢١٣٠, -٢١٣٣, -٢١٣٦, -٢١٣٩, -٢١٤٢, -٢١٤٥, -٢١٤٨, -٢١٥١, -٢١٥٤, -٢١٥٧, -٢١٦٠, -٢١٦٣, -٢١٦٦, -٢١٦٩, -٢١٧٢, -٢١٧٥, -٢١٧٨, -٢١٨١, -٢١٨٤, -٢١٨٧, -٢١٩٠, -٢١٩٣, -٢١٩٦, -٢١٩٩, -٢٢٠٢, -٢٢٠٥, -٢٢٠٨, -٢٢١١, -٢٢١٤, -٢٢١٧, -٢٢٢٠, -٢٢٢٣, -٢٢٢٦, -٢٢٢٩, -٢٢٣٢, -٢٢٣٥, -٢٢٣٨, -٢٢٤١, -٢٢٤٤, -٢٢٤٧, -٢٢٥٠, -٢٢٥٣, -٢٢٥٦, -٢٢٥٩, -٢٢٦٢, -٢٢٦٥, -٢٢٦٨, -٢٢٧١, -٢٢٧٤, -٢٢٧٧, -٢٢٨٠, -٢٢٨٣, -٢٢٨٦, -٢٢٨٩, -٢٢٩٢, -٢٢٩٥, -٢٢٩٨, -٢٣٠١, -٢٣٠٤, -٢٣٠٧, -٢٣١٠, -٢٣١٣, -٢٣١٦, -٢٣١٩, -٢٣٢٢, -٢٣٢٥, -٢٣٢٨, -٢٣٣١, -٢٣٣٤, -٢٣٣٧, -٢٣٤٠, -٢٣٤٣, -٢٣٤٦, -٢٣٤٩, -٢٣٥٢, -٢٣٥٥, -٢٣٥٨, -٢٣٦١, -٢٣٦٤, -٢٣٦٧, -٢٣٧٠, -٢٣٧٣, -٢٣٧٦, -٢٣٧٩, -٢٣٨٢, -٢٣٨٥, -٢٣٨٨, -٢٣٩١, -٢٣٩٤, -٢٣٩٧, -٢٤٠٠, -٢٤٠٣, -٢٤٠٦, -٢٤٠٩, -٢٤١٢, -٢٤١٥, -٢٤١٨, -٢٤٢١, -٢٤٢٤, -٢٤٢٧, -٢٤٣٠, -٢٤٣٣, -٢٤٣٦, -٢٤٣٩, -٢٤٤٢, -٢٤٤٥, -٢٤٤٨, -٢٤٥١, -٢٤٥٤, -٢٤٥٧, -٢٤٦٠, -٢٤٦٣, -٢٤٦٦, -٢٤٦٩, -٢٤٧٢, -٢٤٧٥, -٢٤٧٨, -٢٤٨١, -٢٤٨٤, -٢٤٨٧, -٢٤٩٠, -٢٤٩٣, -٢٤٩٦, -٢٤٩٩, -٢٥٠٢, -٢٥٠٥, -٢٥٠٨, -٢٥١١, -٢٥١٤, -٢٥١٧, -٢٥٢٠, -٢٥٢٣, -٢٥٢٦, -٢٥٢٩, -٢٥٣٢, -٢٥٣٥, -٢٥٣٨, -٢٥٤١, -٢٥٤٤, -٢٥٤٧, -٢٥٥٠, -٢٥٥٣, -٢٥٥٦, -٢٥٥٩, -٢٥٦٢, -٢٥٦٥, -٢٥٦٨, -٢٥٧١, -٢٥٧٤, -٢٥٧٧, -٢٥٨٠, -٢٥٨٣, -٢٥٨٦, -٢٥٨٩, -٢٥٩٢, -٢٥٩٥, -٢٥٩٨, -٢٦٠١, -٢٦٠٤, -٢٦٠٧, -٢٦١٠, -٢٦١٣, -٢٦١٦, -٢٦١٩, -٢٦٢٢, -٢٦٢٥, -٢٦٢٨, -٢٦٣١, -٢٦٣٤, -٢٦٣٧, -٢٦٤٠, -٢٦٤٣, -٢٦٤٦, -٢٦٤٩, -٢٦٥٢, -٢٦٥٥, -٢٦٥٨, -٢٦٦١, -٢٦٦٤, -٢٦٦٧, -٢٦٧٠, -٢٦٧٣, -٢٦٧٦, -٢٦٧٩, -٢٦٨٢, -٢٦٨٥, -٢٦٨٨, -٢٦٩١, -٢٦٩٤, -٢٦٩٧, -٢٧٠٠, -٢٧٠٣, -٢٧٠٦, -٢٧٠٩, -٢٧١٢, -٢٧١٥, -٢٧١٨, -٢٧٢١, -٢٧٢٤, -٢٧٢٧, -٢٧٣٠, -٢٧٣٣, -٢٧٣٦, -٢٧٣٩, -٢٧٤٢, -٢٧٤٥, -٢٧٤٨, -٢٧٥١, -٢٧٥٤, -٢٧٥٧, -٢٧٦٠, -٢٧٦٣, -٢٧٦٦, -٢٧٦٩, -٢٧٧٢, -٢٧٧٥, -٢٧٧٨, -٢٧٨١, -٢٧٨٤, -٢٧٨٧, -٢٧٩٠, -٢٧٩٣, -٢٧٩٦, -٢٨٠٠, -٢٨٠٣, -٢٨٠٦, -٢٨٠٩, -٢٨١٢, -٢٨١٥, -٢٨١٨, -٢٨٢١, -٢٨٢٤, -٢٨٢٧, -٢٨٣٠, -٢٨٣٣, -٢٨٣٦, -٢٨٣٩, -٢٨٤٢, -٢٨٤٥, -٢٨٤٨, -٢٨٥١, -٢٨٥٤, -٢٨٥٧, -٢٨٦٠, -٢٨٦٣, -٢٨٦٦, -٢٨٦٩, -٢٨٧٢, -٢٨٧٥, -٢٨٧٨, -٢٨٨١, -٢٨٨٤, -٢٨٨٧, -٢٨٩٠, -٢٨٩٣, -٢٨٩٦, -٢٩٠٠, -٢٩٠٣, -٢٩٠٦, -٢٩٠٩, -٢٩١٢, -٢٩١٥, -٢٩١٨, -٢٩٢١, -٢٩٢٤, -٢٩٢٧, -٢٩٣٠, -٢٩٣٣, -٢٩٣٦, -٢٩٣٩, -٢٩٤٢, -٢٩٤٥, -٢٩٤٨, -٢٩٥١, -٢٩٥٤, -٢٩٥٧, -٢٩٦٠, -٢٩٦٣, -٢٩٦٦, -٢٩٦٩, -٢٩٧٢, -٢٩٧٥, -٢٩٧٨, -٢٩٨١, -٢٩٨٤, -٢٩٨٧, -٢٩٩٠, -٢٩٩٣, -٢٩٩٦, -٣٠٠٠, -٣٠٠٣, -٣٠٠٦, -٣٠٠٩, -٣٠١٢, -٣٠١٥, -٣٠١٨, -٣٠٢١, -٣٠٢٤, -٣٠٢٧, -٣٠٣٠, -٣٠٣٣, -٣٠٣٦, -٣٠٣٩, -٣٠٤٢, -٣٠٤٥, -٣٠٤٨, -٣٠٥١, -٣٠٥٤, -٣٠٥٧, -٣٠٦٠, -٣٠٦٣, -٣٠٦٦, -٣٠٦٩, -٣٠٧٢, -٣٠٧٥, -٣٠٧٨, -٣٠٨١, -٣٠٨٤, -٣٠٨٧, -٣٠٩٠, -٣٠٩٣, -٣٠٩٦, -٣١٠٠, -٣١٠٣, -٣١٠٦, -٣١٠٩, -٣١١٢, -٣١١٥, -٣١١٨, -٣١٢١, -٣١٢٤, -٣١٢٧, -٣١٣٠, -٣١٣٣, -٣١٣٦, -٣١٣٩, -٣١٤٢, -٣١٤٥, -٣١٤٨, -٣١٥١, -٣١٥٤, -٣١٥٧, -٣١٦٠, -٣١٦٣, -٣١٦٦, -٣١٦٩, -٣١٧٢, -٣١٧٥, -٣١٧٨, -٣١٨١, -٣١٨٤, -٣١٨٧, -٣١٩٠, -٣١٩٣, -٣١٩٦, -٣٢٠٠, -٣٢٠٣, -٣٢٠٦, -٣٢٠٩, -٣٢١٢, -٣٢١٥, -٣٢١٨, -٣٢٢١, -٣٢٢٤, -٣٢٢٧, -٣٢٣٠, -٣٢٣٣, -٣٢٣٦, -٣٢٣٩, -٣٢٤٢, -٣٢٤٥, -٣٢٤٨, -٣٢٥١, -٣٢٥٤, -٣٢٥٧, -٣٢٦٠, -٣٢٦٣, -٣٢٦٦, -٣٢٦٩, -٣٢٧٢, -٣٢٧٥, -٣٢٧٨, -٣٢٨١, -٣٢٨٤, -٣٢٨٧, -٣٢٩٠, -٣٢٩٣, -٣٢٩٦, -٣٣٠٠, -٣٣٠٣, -٣٣٠٦, -٣٣٠٩, -٣٣١٢, -٣٣١٥, -٣٣١٨, -٣٣٢١, -٣٣٢٤, -٣٣٢٧, -٣٣٣٠, -٣٣٣٣, -٣٣٣٦, -٣٣٣٩, -٣٣٤٢, -٣٣٤٥, -٣٣٤٨, -٣٣٥١, -٣٣٥٤, -٣٣٥٧, -٣٣٦٠, -٣٣٦٣, -٣٣٦٦, -٣٣٦٩, -٣٣٧٢, -٣٣٧٥, -٣٣٧٨, -٣٣٨١, -٣٣٨٤, -٣٣٨٧, -٣٣٩٠, -٣٣٩٣, -٣٣٩٦, -٣٤٠٠, -٣٤٠٣, -٣٤٠٦, -٣٤٠٩, -٣٤١٢, -٣٤١٥, -٣٤١٨, -٣٤٢١, -٣٤٢٤, -٣٤٢٧, -٣٤٣٠, -٣٤٣٣, -٣٤٣٦, -٣٤٣٩, -٣٤٤٢, -٣٤٤٥, -٣٤٤٨, -٣٤٥١, -٣٤٥٤, -٣٤٥٧, -٣٤٦٠, -٣٤٦٣, -٣٤٦٦, -٣٤٦٩, -٣٤٧٢, -٣٤٧٥, -٣٤٧٨, -٣٤٨١, -٣٤٨٤, -٣٤٨٧, -٣٤٩٠, -٣٤٩٣, -٣٤٩٦, -٣٥٠٠, -٣٥٠٣, -٣٥٠٦, -٣٥٠٩, -٣٥١٢, -٣٥١٥, -٣٥١٨, -٣٥٢١, -٣٥٢٤, -٣٥٢٧, -٣٥٣٠, -٣٥٣٣, -٣٥٣٦, -٣٥٣٩, -٣٥٤٢, -٣٥٤٥, -٣٥٤٨, -٣٥٥١, -٣٥٥٤, -٣٥٥٧, -٣٥٦٠, -٣٥٦٣, -٣٥٦٦, -٣٥٦٩, -٣٥٧٢, -٣٥٧٥, -٣٥٧٨, -٣٥٨١, -٣٥٨٤, -٣٥٨٧, -٣٥٩٠, -٣٥٩٣, -٣٥٩٦, -٣٦٠٠, -٣٦٠٣, -٣٦٠٦, -٣٦٠٩, -٣٦١٢, -٣٦١٥, -٣٦١٨, -٣٦٢١, -٣٦٢٤, -٣٦٢٧, -٣٦٣٠, -٣٦٣٣, -٣٦٣٦, -٣٦٣٩, -٣٦٤٢, -٣٦٤٥, -٣٦٤٨, -٣٦٥١, -٣٦٥٤, -٣٦٥٧, -٣٦٦٠, -٣٦٦٣, -٣٦٦٦, -٣٦٦٩, -٣٦٧٢, -٣٦٧٥, -٣٦٧٨, -٣٦٨١, -٣٦٨٤, -٣٦٨٧, -٣٦٩٠, -٣٦٩٣, -٣٦٩٦, -٣٧٠٠, -٣٧٠٣, -٣٧٠٦, -٣٧٠٩, -٣٧١٢, -٣٧١٥, -٣٧١٨, -٣٧٢١, -٣٧٢٤, -٣٧٢٧, -٣٧٣٠, -٣٧٣٣, -٣٧٣٦, -٣٧٣٩, -٣٧٤٢, -٣٧٤٥, -٣٧٤٨, -٣٧٥١, -٣٧٥٤, -٣٧٥٧, -٣٧٦٠, -٣٧٦٣, -٣٧٦٦, -٣٧٦٩, -٣٧٧٢, -٣٧٧٥, -٣٧٧٨, -٣٧٨١, -٣٧٨٤, -٣٧٨٧, -٣٧٩٠, -٣٧٩٣, -٣٧٩٦, -٣٨٠٠, -٣٨٠٣, -٣٨٠٦, -٣٨٠٩, -٣٨١٢, -٣٨١٥, -٣٨١٨, -٣٨٢١,$

$$[T + L_{\mathbb{R}} \otimes L \cup \mathbb{P} - \mathbb{P}A = \mathbb{P}L]$$

[424]

[(1994-1995)]

【(→ 6 7 8 9 10)】

【(一) 本 文 中 的 数 字 均 为 估 计 值】

[[106 742 96 16 T)]]

[WCAV]

[१५]

$$\{(\dots, \text{N4Y}(T)) : T = u\}$$

[(1971-1972) 1.2.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27.28.29.30.31.32.33.34.35.36.37.38.39.40.41.42.43.44.45.46.47.48.49.50.51.52.53.54.55.56.57.58.59.60.61.62.63.64.65.66.67.68.69.70.71.72.73.74.75.76.77.78.79.80.81.82.83.84.85.86.87.88.89.90.91.92.93.94.95.96.97.98.99.100.101.102.103.104.105.106.107.108.109.110.111.112.113.114.115.116.117.118.119.120.121.122.123.124.125.126.127.128.129.130.131.132.133.134.135.136.137.138.139.140.141.142.143.144.145.146.147.148.149.150.151.152.153.154.155.156.157.158.159.160.161.162.163.164.165.166.167.168.169.170.171.172.173.174.175.176.177.178.179.180.181.182.183.184.185.186.187.188.189.190.191.192.193.194.195.196.197.198.199.200.201.202.203.204.205.206.207.208.209.210.211.212.213.214.215.216.217.218.219.220.221.222.223.224.225.226.227.228.229.230.231.232.233.234.235.236.237.238.239.240.241.242.243.244.245.246.247.248.249.250.251.252.253.254.255.256.257.258.259.260.261.262.263.264.265.266.267.268.269.270.271.272.273.274.275.276.277.278.279.280.281.282.283.284.285.286.287.288.289.290.291.292.293.294.295.296.297.298.299.300.301.302.303.304.305.306.307.308.309.310.311.312.313.314.315.316.317.318.319.320.321.322.323.324.325.326.327.328.329.330.331.332.333.334.335.336.337.338.339.340.341.342.343.344.345.346.347.348.349.350.351.352.353.354.355.356.357.358.359.360.361.362.363.364.365.366.367.368.369.370.371.372.373.374.375.376.377.378.379.380.381.382.383.384.385.386.387.388.389.390.391.392.393.394.395.396.397.398.399.400.401.402.403.404.405.406.407.408.409.410.411.412.413.414.415.416.417.418.419.420.421.422.423.424.425.426.427.428.429.430.431.432.433.434.435.436.437.438.439.440.441.442.443.444.445.446.447.448.449.450.451.452.453.454.455.456.457.458.459.460.461.462.463.464.465.466.467.468.469.470.471.472.473.474.475.476.477.478.479.480.481.482.483.484.485.486.487.488.489.490.491.492.493.494.495.496.497.498.499.500.501.502.503.504.505.506.507.508.509.510.511.512.513.514.515.516.517.518.519.520.521.522.523.524.525.526.527.528.529.530.531.532.533.534.535.536.537.538.539.540.541.542.543.544.545.546.547.548.549.550.551.552.553.554.555.556.557.558.559.560.561.562.563.564.565.566.567.568.569.570.571.572.573.574.575.576.577.578.579.580.581.582.583.584.585.586.587.588.589.590.591.592.593.594.595.596.597.598.599.600.601.602.603.604.605.606.607.608.609.610.611.612.613.614.615.616.617.618.619.620.621.622.623.624.625.626.627.628.629.630.631.632.633.634.635.636.637.638.639.640.641.642.643.644.645.646.647.648.649.650.651.652.653.654.655.656.657.658.659.660.661.662.663.664.665.666.667.668.669.670.671.672.673.674.675.676.677.678.679.680.681.682.683.684.685.686.687.688.689.690.691.692.693.694.695.696.697.698.699.700.701.702.703.704.705.706.707.708.709.710.711.712.713.714.715.716.717.718.719.720.721.722.723.724.725.726.727.728.729.730.731.732.733.734.735.736.737.738.739.740.741.742.743.744.745.746.747.748.749.750.751.752.753.754.755.756.757.758.759.760.761.762.763.764.765.766.767.768.769.770.771.772.773.774.775.776.777.778.779.780.781.782.783.784.785.786.787.788.789.790.791.792.793.794.795.796.797.798.799.800.801.802.803.804.805.806.807.808.809.810.811.812.813.814.815.816.817.818.819.820.821.822.823.824.825.826.827.828.829.830.831.832.833.834.835.836.837.838.839.840.841.842.843.844.845.846.847.848.849.850.851.852.853.854.855.856.857.858.859.860.861.862.863.864.865.866.867.868.869.870.871.872.873.874.875.876.877.878.879.880.881.882.883.884.885.886.887.888.889.890.891.892.893.894.895.896.897.898.899.900.901.902.903.904.905.906.907.908.909.910.911.912.913.914.915.916.917.918.919.920.921.922.923.924.925.926.927.928.929.930.931.932.933.934.935.936.937.938.939.940.941.942.943.944.945.946.947.948.949.950.951.952.953.954.955.956.957.958.959.960.961.962.963.964.965.966.967.968.969.970.971.972.973.974.975.976.977.978.979.980.981.982.983.984.985.986.987.988.989.990.991.992.993.994.995.996.997.998.999.1000.1001.1002.1003.1004.1005.1006.1007.1008.1009.1010.1011.1012.1013.1014.1015.1016.1017.1018.1019.1020.1021.1022.1023.1024.1025.1026.1027.1028.1029.1030.1031.1032.1033.1034.1035.1036.1037.1038.1039.

【参考文献】

٧) عدد حدود المتابعة الحسابية (٣) من ٤٧٤ ... ٨٤ ... ١ يساوي

$$[١٠ \text{ د } ١٩ \text{ د } ٢٠ \text{ د } ٢٦]$$

٨) عدد الحدود فردية الرتبة من حدود المتابعة الحسابية (٢) ٨٤٥ ... ١٨٤ يساوي

$$[١٨ \text{ د } ٢٠ \text{ د } ١٩ \text{ د } ٢٧]$$

٩) إذا كان (٢) ٥٤١ - ٦٤١ (٣ +) متتابعة حسابية فإن $u = \dots$

$$[١ \text{ د } ٢ \text{ د } ٣ \text{ د } ٥]$$

١٠) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣٥ وأساسها عدد صحيح، u هو أول حد سالب

$$\text{فإن } u = \dots [١ - \text{ د } ٢ - \text{ د } ٣ - \text{ د } ٤ -]$$

١١) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥١ وأساسها عدد صحيح، u هو أول حد موجب

$$\text{فإن } u = \dots [١ \text{ د } ٢ \text{ د } ٣ \text{ د } ٤]$$

١٢) متتابعة حسابية فيها $u = ٤٥$ ، $u_٢ = ٢١$ ، $u_٣ = ٤١$

$$\text{فإن } u = \dots [٤ \text{ د } ٥ \text{ د } ٦ \text{ د } ٧]$$

١٣) إذا كان (١٧٤ ... ٢٥٤) تكون متتابعة حسابية وكانت $u = ١٥ + ٢$

$$\text{فإن عدد حدود المتابعة} = \dots [٧ \text{ د } ٨ \text{ د } ٩ \text{ د } ١٠]$$

١٤) في أي متتابعة حسابية يكون $u_٣ + u_٥ - u_٢ = \dots$

$$[u_٤ \text{ د } u_٨ \text{ د } u_٦ \text{ د } u_١]$$

١٥) إذا كان (١) متتابعة حسابية فيها $u = ٢$ ، $u = ١$ فإن أساس المتابعة =

$$[u + ٢ \text{ د } u - ٢ \text{ د } u - u \text{ د } u + ٢]$$

١٦) متتابعة حسابية فيها $u = \frac{1}{u}$ ، $\frac{1}{u} = \frac{1}{u}$ فإن $u + ٢ = \dots$

$$[\frac{u}{u} \text{ د } u + u \text{ د } u \times u \text{ د } u - u]$$

١٧) أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهم ٢٠ ومجموع مقلوبى الحدين الثانى

والثالث يساوى $\frac{5}{11}$ فإن الأعداد هي

$$[٨٤٦٤٤٤٢ \text{ د } ٩٠٨٤٦٤٤ \text{ د } ١٢٤٩٦٤٢ \text{ د } ٧٤٥٢٤١]$$

١٨) إذا كان $u_٢ + u_١$ من المتتابعة الحسابية $\frac{1}{١٣}$ ، $\frac{1}{١٤}$... يساوى $u + u_٩$

من المتتابعة الحسابية $\frac{1}{٤٦}$ ، $\frac{1}{٤٣}$... فإن $u = \dots$

$$[١ \text{ د } ٢ \text{ د } ٣ \text{ د } ٤]$$

[الرابع] d الخامس d السادس d السابع]

إذا كان الحد الأول والثالث من متتابعة حسابية يساويان على الترتيب الحدين الثاني والخامس من متتابعة أخرى **فلذلك** أن الحد الخامس من المتتابعة الأولى يساوي الحد الثامن من المتتابعة الثانية.

متتابعة حسابية فيها $u_3 = 30$ ووسطا متناهيين u_1, u_{11} أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٦٦

٤٩) (س، ص، ع، ل، ...) متتابعة حسابية فيها $s = l + ٤$ ، $v = e + ٢$ ، $s = ١٠$ أوجد المتتابعة.

٤٤٧ { ١، ٢، ٣، ٤ } متتابعة حسابية متناهية فإذا كان $1 + 2 + 3 + \dots + n = 100$ فإن $n =$ ؟

14 (ع) متتابعة معرفة بحيث $1 = a_1, a_2 = 1 + a_1, a_3 = 1 + a_2, \dots$ متتابعة أخرى معرفة بحيث $1 = b_1, b_2 = 1 + b_1, b_3 = 1 + b_2, \dots$ **أثبت** أن كلا من (a_n) ، (b_n) متتابعة حسابية وأوجد كلا منهما ثم أوجد أول حد موجب في المتتابعة (c_n) ($c_n = a_n b_n$)



الوساط الحسابية

الدرس

٣

إذا كانت a, b, c هي ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن b تعرف بالوسط الحسابي بين a و c . وقد علمنا مما سبق أن الأساس = أي حد - السابق له أي أنه في المتتالية (a, b, c) يكون: $b - a = c - b$ و $b = \frac{a+c}{2}$

وعلمنا في السنوات السابقة أن الوسط الحسابي لأي عددين يساوي $\frac{a+c}{2}$ وهو ما يتوافق مع ما ندرسه الآن ومن ذلك نلاحظ أن الوسط الحسابي لأي عددين عند وضعه بين العددين فإن الحدود الثلاثة تكون متتابعة حسابية.

أولاً (a, b, c) أو $(a, \frac{a+c}{2}, c)$ متتابعة حسابية وإذا كانت المتتابعة الحسابية لتكون من أربعة حدود مثل (a, b, c, d) فإن b, c يكونان وسطين حسابيين وتسمى جميع الحدود التي تقع بين أي عددين غير متتاليين بالأوساط الحسابية.

أدخل عدد واحد من الأوساط الحسابية بين هذين

إذا كان $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100$ متتابعة حسابية.

مثال

ادخل 7 أوساط حسابية بين 25 و 3

الحل

$$\therefore \text{عدد الحدود} = 2 + 7 = 9$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = 7$$

$$\therefore \text{لدينا متتابعة حدها الأول} = 3 \text{ حدها الأخير} = 25$$

$$\therefore 25 = 3 + (9 - 1) \times r$$

$$\therefore 22 = (1 - r) \times r$$

$$\therefore r = 2$$

$$\therefore 22 = 1 - r$$

$$\therefore \text{الأوساط هي: } 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31$$

$$\text{ملاحظة: } \therefore 25 = 3 + (9 - 1) \times 2 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore \text{الأوساط هي: } (31, 27, 23, 19, 15, 11, 7)$$

ملاحظات مهمة

○ عدد الأوساط الحسابية في أي متتابعة = عدد حدود المتتابعة - 1

○ الوسط الذي ترتيبه n في متتابعة حسابية = $u_n = u_1 + (n - 1)r$

فمثلاً ، الوسط الثالث = $u_3 = u_1 + 2r$ والوسط الخامس = $u_5 = u_1 + 4r$ وهكذا ...

$$\text{○ يفرض أن } r \text{ هي عدد الأوساط فإن } r = \frac{u_n - u_1}{n - 1}$$

الإثبات : عدد الأوساط $r = \text{عدد الحدود} - 1 = n - 1$

$$\therefore u_n = u_1 + (n - 1)r \quad \therefore r = \frac{u_n - u_1}{n - 1}$$

مثال ٢

أوجد العددين الذين وسطهما الحسابي $\frac{1}{4}$ والنسبة بينهما ٣ : ٢

الحل

$$\begin{aligned} \text{نفرض أن العددين } x \text{ و } y \text{ حيث } x : y = 3 : 2 \\ \therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \frac{3}{2}y \\ \therefore \text{العددين هما } 3 \times 3 = 9 \text{ و } 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين x و y تكون المتتابعة حسابية هي
 (x, \dots, y) ويكون الوسط الأول $= \frac{x+y}{2}$ والوسط الأخير $= \frac{x+y}{2}$ وهكذا...
 الوسط الثاني $= \frac{x+y}{2}$ والوسط الأخير $= \frac{x+y}{2}$ وهكذا..

مثال ٣

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٢ و ٢٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأول والرابع إلى مجموع الوسطين الأخيرين هما ٣ : ١ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن أساس المتتابعة = x

\therefore الوسطين الأول والرابع هما x و $x+3x$ والوسطين الأخيرين هما $x+24x$ و $x+25x$

$$\frac{1}{3} = \frac{x + x + 3x + x}{x + 24x + x + 25x} \quad \therefore \frac{1}{3} = \frac{6x}{50x}$$

$$x + 3x = 4x \quad \therefore x + 24x = 25x$$

$$x(1+3) = 4x \quad \therefore x(1+24) = 25x$$

$$4x = 25x \quad \therefore 25x = 4x$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = 10$$

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 \quad \therefore \frac{1-x}{1+x} = 1$$

$$1-x = 1+x \quad \therefore 1-x = 1+x$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = 10$$

$$\text{ملاحظة } 1 : x = 1 \quad \therefore x = 1$$

$$\frac{1-x}{1+x} = 1 \quad \therefore \frac{1-x}{1+x} = 1$$

$$\therefore 1-x = 1+x$$

مثال

إذا كان b وسطًا حسابيًا للعددين a و c فأثبت أن: $\frac{a^2 - 12}{b - a} + \frac{15 - ac}{1 - b} = 1$

الحل

$\therefore b$ وسطًا حسابيًا للعددين a و c $\therefore \frac{a+c}{2} = b$

$$\frac{a^2 - 12}{b - a} + \frac{15 - ac}{1 - b} = \frac{a^2 - 12}{\frac{a+c}{2} - a} + \frac{15 - ac}{1 - \frac{a+c}{2}} \therefore$$

$$= \frac{(1-a)2 \times 2}{1-a} = \frac{12 - a^2}{\frac{1-a}{2}} = \frac{a^2 - 12}{\frac{1-a}{2}} + \frac{15 - ac}{\frac{1-a}{2}} =$$

تمرين ٣

في الحساب الحسابية

أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية،

راجع معنا واختر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة النهائية



١. أجب عن الأسئلة الآتية،

١) الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ...) هو

[١٧ د ١٨ د ١٩ د ٢٠]

٢) إذا كان $u_n = 3 - 2n$ فإن أساس المتتابعة الحسابية (u_n) =

[٣- د ٢ د ٢- د ٢]

٣) $\sum_{k=1}^n (2k+1) = \dots\dots\dots$

[٢٥ د ٣٠ د ٣٥ د ٤٠]

٤) الحد الخامس للمتتابعة (u_n) حيث $u_n = 9 - n$ هو

[١١ د ٩ د ١٣ د ١٥]

٥) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية (٦٧، ٦٤، ٦١، ٥٨، ...)

.....

٦) (u_n) متتابعة حسابية فيها $u_1 = 9$ ، $u_2 = 22$ أوجد المتتابعة

ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي ٦٦

.....

(١٧) إذا كانت a, b وسطين حسابيين بين c, d فإن $\frac{c-d}{a-b}$ تساوي

[٢] [٣] [٤] [٥] [٦]

مسائل المستوى الثاني

١) أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٤٨٤ و ٦١٣

٢) أدخل خمسة أوساط حسابية بين ٢٢٤ و ٤٤٤ ثم أوجد الوسط الرابع

٣) أدخل ١٢ وسطاً حسابياً بين ٢٥٤ و ٦٤ ثم أوجد كل من الوسط الأول والوسط الأخير

٤) أدخل ١٦ وسطاً حسابياً بين العددين ٤٢٧ و ٢٤

٥) عدان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ووسطها الحسابي = ١٣ أوجد العددين

٦) أوجد عددين يزيد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٣ ووسطهما الحسابي = $10\frac{1}{4}$

٧) إذا كان الوسط الخامس بين العددين ٣ و ٧٤ من متتابعة حسابية هو ٢٣

فأوجد عدد الأوساط ثم قيمة الوسط التاسع

٨) متتابعة حسابية حدها التاسع يساوي ٢٥ والوسط الحسابي بين حديها الثالث

والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة

٩) إذا كانت ٣٩ ، ٤١ ، ٤٤ ، ٤٦ حدود متتالية من متتابعة حسابية

فأوجد قيمة كل من a و b

١٠) إذا كان الوسط الحسابي بين a, b هو ٨ والوسط الحسابي بين c, d هو ٢٠

فأوجد قيمة كل من a و b

١١) إذا أدخلت أوساط حسابية بين ١٧٤ و ٤٤٤ وكان الوسط السابع يساوي ثلاثة أمثال

الوسط الثاني أوجد عدد هذه الأوساط

١٢) أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها الوسط الحسابي بين حديها الثالث والسابع هو

١٩ وحدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٣

١٦. متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والرابع = ١٦ والوسط الحسابي لحديها الثاني والرابع = ٩ أوجد المتتابعة ثم أوجد الوسط الخامس
(١٠٠، ١٠٠، ١٠٠، ١٠٠)

١٧. إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٣ و ٢٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هي ٣ : ١٩ فما عدد تلك الأوساط ؟
(١٠)

١٨. إذا كان a, b وسطين حسابيين بين s, c فاثبت أن $s - c = 3(c - a)$
(١٠)

١٩. إذا أدخلنا بين ٢ و ٢٨ عدة أوساط حسابية عددها n وكانت النسبة بين الوسط الثالث والوسط الذي ترتيبه $(n-1)$ هي ١ : ٣ فما قيمة n ؟
(١٠)

٢٠. إذا كانت s هي الوسط الحسابي بين s, c فاثبت أن :

$$① (s + 2 + s)(c + 2 + s) = (c - s - s) = \text{صفر}$$

$$② \frac{s + 2 + s}{c - s} + \frac{s + 2 + s}{c - s} = 1$$

مسائل تقبس مستويان عليا في التفكير

٢١. اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت (s, c, s) هي تتابع حسابي فإن $s = \dots$

$$[(s + 2 + s) \quad (s + 2 + s) \quad (s + 2 + s) \quad (s + 2 + s)]$$

② عند إدخال عدة أوساط حسابية بين a, b يكون الوسط قبل الأخير =

$$[(a - 2) \quad (a - 2) \quad (a - 2) \quad (a - 2)]$$

③ إذا كانت (c, s) متتابعة حسابية حيث $c = 3, s = 2$ فإن الوسط الحسابي

$$[2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

④ إذا كان الوسط الحسابي للمعددين ٣ و ٥ يساوي ٩ فإن $s = \dots$

$$[2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

⑤ إذا كان (s, c, s) في تتابع حسابي فإن $c = \dots$

$$[2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

⑥ إذا كان $(a - 1)$ الوسط الحسابي للمعددين $(1 + 1)$ و $(3 + 1)$ فإن $a = \dots$

$$[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$



هنا قيمة الحد الأوسط = $\dots\dots\dots$ $[-14 \quad 6 \quad 4- \quad 4 \quad 4 \quad 4-]$

٨) إذا كان $(1 - 2 + 4 - 8 + \dots)$ في تتابع حسابي فإن $1 + 2 + 4 + 8 + \dots =$

[7-67 d] 767- d] 7-69 d] 769-]

④ إذا كانت (l, l, m) في تتابع حسابي، $l = m$ ، $l \neq m$ ، $l \neq m$

$$\left[\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\right] \quad \text{فإن } 2 + 2 = 4$$

(١٥) إذا كان الوسط الحسابي للعديدين x_1, x_2, \dots, x_n يساوي a والوسط الحسابي بين a, b

مربعاً حيث $a < b$ فإن $b : a = \dots\dots\dots = c : d$ $d : c = e : f$ $f : e = g : h$ $h : g = i : j$

(۱۶) ان مکانوں میں وسط حسابی ہیں | ا، م، خاں، ب، ۲ - (م - ب) ۲ =

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

(۱۲) اِذَا صَكَتَ صِرَ وَعِطَ حَسَابِي بَيْنَ سَ، عَ فَإِنَّ صِرَ - صِرَ = $\frac{\text{ص} + ۲}{\text{ع} - ۲} - \frac{\text{ص} + ۲}{\text{ع}}$

[६ ८ ९ ८ ९ ८ ९]

(١٣) إنا نكافؤ ٢٤ ب ٢٤ هـ في تبايع حسابي ٢٤ ب ٢٤ هـ ٤ في تبايع حسابي أيضًا

[\mathcal{H}_1 d \mathcal{H}_2 d \mathcal{H}_3 d \mathcal{H}_4] ***** = $s + 12$ جاب

(١٩) إذا جئت a, b, c, d متتابعة حسابية فإن $\frac{a-d}{1-d} = \frac{a-b}{1-b} = \frac{b-c}{1-c} = \frac{c-d}{1-d}$

$$\left[1 \quad d \quad \frac{1}{4} \quad d \quad \frac{1}{4} \quad d \quad \frac{1}{4}\right]$$

(١٥) انوسيط الحسابي للحددين الثالث عشر والخامس والعشرين من متتالية حسابية

پیسوی ۲۸۵ = ۱۹ ع + ۲۰ ع + ۸۴ فیاض حیدر الاول پیسوی

[२४.० d २४ d २४.० d २४]

(١٦) إذا كانت ١٥ ٤ ٣ س + ٢ ٤ س - ٥ متتابعة حسابية فإن رتبة أول حد قيمته

نقل ص (٥٠-) هو ++++++

لا يوجد قياس لكل زوايا المثلث الذي فيه قياس (أحد) زواياه هو الوسيط؛ التحساب بين قياسي

انزایوتین، الاخرین، والصرق بین قیاسی الراویتین، الکیری والصفری یساوی ۸۰ [۶۰، ۶۰، ۶۰]

ادخل ٦ أوساط حسابية بين لو ٢، ل٣

٢٧) إذا أدخل بين العددين f و g ثلاثة أوساط حسابية مجموعها ٤٢١ وإذا أدخل بين نفس العددين خمسة أوساط حسابية أخرى وكان أول الأوساط الثلاثة الأولى يزيد عن أول الأوساط الخمسة الأخرى بمقدار ٢ أوجد العددين f و g [١١١]

٢٨) أوجد النسبة بين أطوال أضلاع $\triangle ABC$ القائمة الزاوية في B والذي أطوال أضلاعه هي تتابع حسابي حيث A هو الوسط الحسابي بين B و C [١٢١]

٢٩) إذا كان s و t و u في تتابع حسابي فأثبت أن: $s + t + u$ و $s + t + u$ و $s + t + u$ في تتابع حسابي أيضاً.



المتسلسلات الحسابية

الحل الأول

٤

المشكلة الحسابية

هي عملية جمع حدود المتتالية الحسابية.

فمثلاً المتتالية الحسابية (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠) يمكن جمع حدودها الخمسة وتكتب في صورة متسلسلة حسابية بالشكل $2 + 4 + 6 + 8 + 10 =$ حيث 2 هو u_1 ويرمز لمجموع خمسة حدود متتالية من المتتالية.

مع ملاحظة أن المتتالية عندما تكات مكتوبة في صورة دالة مثل $(u_n) = (2n)$ فإن مجموع المتسلسلة المتكونة من الخمسة حدود الأولى يكتب على الصورة $\sum_{i=1}^5 (2i)$

② مجموع n حداً من متتالية حسابية

أولاً:- مجموع n حداً من متتالية حسابية معلومة حديها الأول u_1 والآخر u_n

إذا كان الحد الأول من المتتالية الحسابية هو u_1 وحدها الأخير هو u_n وأساسها d وعدد حدودها n فإن مجموع هذه الحدود (مجموع n حداً) من المتتالية الحسابية يرمز له



بالرمز n ، ويعطى بالمتسلسلة التالية،

$$(1) \Rightarrow 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 = n$$

كما يمكن كتابة المتسلسلة بالحدود،

$$(2) \Rightarrow 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 = n$$

ولجمع المعادلتين (1)، (2) ونصلح أن،

$$2n = 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1$$

$$\text{أي أن } 2n = n(n + 1) \text{ ويقسم الطرفين على } 2 \Rightarrow \frac{n(n + 1)}{2} = n$$

حيث n هو عدد الحدود، 1 هو الحد الذي يبدأ به، n هو الحد الأخير وتستخدم هذه القاعدة لإدراك علم في المتتابعة حدها الأول والأخير

مثال ١

أوجد مجموع العشرين حذا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول 4 وحدها العشرين 61

الحل

$$4 = 1 \quad 61 = n \quad 61 = [4 + 1] \frac{n}{2} \Rightarrow n = 116$$

مثال ٢

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية $6 + 9 + 12 + \dots + 33$

الحل

$3 = 9 - 6$ ، يلزم إيجاد عدد الحدود باستخدام الحد الموني للمتتابعة

$$3 = (n - 1) + 6$$

$$3 = 6n - 6 \Rightarrow 9 = 6n \Rightarrow n = 1.5$$

$$3 = 6 \times (n - 1) + 6 \Rightarrow 3 = 6n - 6 \Rightarrow 9 = 6n \Rightarrow n = 1.5$$

ثم نوجد مجموع 1.5 حدود باستخدام الحد الأول والأخير

$$1.5 = \frac{n(n + 1)}{2} \Rightarrow 1.5 = [33 + 6] \frac{n}{2} \Rightarrow n = 1$$

مجموع n حذا من متبعة حسابية بمعلومية حدها الأول l والأساس r



علما فيما سبق أن $l = 1 + (n-1)r$ وعلما أن $u = \frac{r}{r-1}$ $(r \neq 1)$

وبالتعويض بالعلاقة الأولى في العلاقة الثانية فإن:

$$u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r] \quad : \quad u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r]$$

وتستخدم هذه القاعدة إذا علم في المتتابعة حدها الأول والأساس.

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

مجموع حدود متتابعة حسابية حدها الأول l وعدد حدودها n ،
ويستخدم إذا علم الحد الأخير (l) $u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r]$
ويستخدم إذا علم الأساس (r) $u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r]$

مثال ٢

أوجد مجموع العشرين حذاً الأولى من المتتابعة الحسابية: $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$

الحل

$$2 = 4 - 2 = r$$

$$u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r] \quad : \quad u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r]$$

$$u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r] \quad : \quad u = \frac{r}{r-1} [1 + (n-1)r]$$

ملاحظات هامة

- ١ لإيجاد المجموع u يلزم معرفة عدد الحدود n وإذا كانت غير معلومة توجد من القاعدة $l = 1 + (n-1)r$
- ٢ لإيجاد المجموع ابتداء من حد معين توجد قيمة هذا الحد وتعوض عنه بدلاً من 1 في القاعدة التي نستخدمها **فمثلاً** ، إذا كان مطلوب المجموع بدءاً من الحد الثالث فإننا عوض به 3 بدلاً من 1

$$\textcircled{2} \text{ ع } n = (1 - u) + 1 = 5 \quad \therefore \text{ع } 1 = 3 \times 1 + 5 = 8 \quad \text{ع } 2 = 3 \times 2 + 5 = 11$$

لايجاد مجموع 10 حدود ابتداء من الحد السابع نضع ع₇ بدلاً من 1 في قانون المجموع هـ، $\frac{10}{4} = \frac{1}{4} [3 \times (1 - 10) + \text{ع } 7]$ بالتعويض في صيغة المجموع

$$\text{هـ } 10 = 73 \times 5 = [22 + 73 \times 2] \times 5 = \text{ع } 10$$

مجموع حدود المتتالية ابتداء من ع₁₀ الى ع₂₀

$$\text{ع } 20 = (1 - u) + 1 = 5 \quad \therefore \text{ع } 10 = 3 \times 10 + 5 = 35 \quad \text{ع } 21 = 3 \times 11 + 5 = 38$$

$$\text{ع } 21 = 3 \times 11 + 5 = 38$$

لايجاد مجموع حدود المتتالية بدءاً من ع₁₀ الى ع₂₀ نضع ع₁₀ بدلاً من 1 في القانون

ونضع ع₂₀ بدلاً من 1

$$\therefore \text{هـ } - \frac{u}{4} = (n + 1)$$

$$\therefore \text{هـ } 10 = (35 + 38) \frac{11}{4} = (\text{ع } 10 + \text{ع } 20) \frac{11}{4} = 517$$

ملاحظة

يمكن إيجاد مجموع حدود المتتالية بدءاً من ع₁₀ الى ع₂₀ من طريق إيجاد هـ، ونطرح منها هـ، فيكون الناتج هو مجموع الحدود من ع₁₀ الى ع₂₀

مثال

أوجد المتتالية الحسابية التي فيها ع₁₀ = 11 ، ع₂₀ = 87 ، هـ = 980

الحل

لاحظ أن ع₁₀ هو 1 ، ع₂₀ هو 11 ، هـ هو 980

أو أ، لوجد قيمة n

$$\therefore \frac{u}{4} = (87 + 11)$$

$$\text{هـ } = \frac{u}{4} (n + 1)$$

فيكون n = 20 حلاً

$$980 = \frac{u}{4} \times 11$$

مثال ٨

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتالية الحسابية (٧١، ٦٨، ٦٥، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا ثم أوجد أكبر مجموع لهذه المتتالية

الحل

لإيجاد أصغر عدد من الحدود ليكون المجموع سالبًا نفرض أن $n > 0$.

$$3 - = 71 - 68 = 3 \quad \therefore \text{هـ} \quad \frac{U}{4} = [3(1 - U) + 71]$$

$$\therefore \frac{U}{4} [3 - x(1 - U) + 71 \times 2] > 0 \quad \therefore \text{موجبة دائمًا}$$

$$3 + U^3 - 142 > 0 \quad \therefore U^3 > 139$$

$$48 \frac{1}{4} < U \quad \therefore U = 49$$

\therefore أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها ليكون مجموع المتتالية سالبًا هو ٤٩، هذا أكبر مجموع لهذه المتتالية هو مجموع الحدود الموجبة ولإيجاد مجموع الحدود الموجبة يلزم معرفة آخر حد موجب في هذه المتتالية.

$$\therefore \text{نفرض أن } n < 0 \quad \therefore 3(1 - U) + 71 < 0$$

$$3 - x(1 - U) + 71 < 0 \quad \therefore 3 + U^3 - 71 < 0$$

$$U^3 < 68 \quad \therefore U < 4.1 \quad \therefore U = 4$$

\therefore عدد الحدود الموجبة = ٢٤ هذا

$$\text{هـ} \quad \frac{24}{4} = [3 - x \cdot 23 + 71 \times 2] = 879$$

مثال ٩

أوجد المتتالية الحسابية التي مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوي ٧٧ ومجموع السبعة حدود التالية لها يساوي ٢٢٤

الحل

$$\therefore \text{هـ} \quad \frac{U}{4} = [3(1 - U) + 71] \quad \therefore [7 + 71] \frac{U}{4} = 77$$

$$\therefore 7 + 71 = 78 \quad \text{①}$$

$$\therefore [7 + 78] \frac{U}{4} = 224 \quad \therefore \text{الحدود السبعة التالية تبدأ من } 78$$

$$[s^2 + s\gamma + 1]Y = Y(1) \Rightarrow$$

بطرح ① من ② :

∴ المتتالية هي (٢، ٥، ٨، ...) .

$$[s_7 + (s_5 + p) \tau] \frac{v}{\tau} = v v_1.$$

$$\textcircled{7} \rightarrow 44 = 39 + 5$$

$$\gamma = \beta \text{ et } \gamma = \beta.$$

حل آخر،

يمكن اعتبار مجموع السبعة حدود الأولى ٧٧ ومجموع الأربعة عشر حداً الأولى ٣٠١ لكن يكون الحد الأول واحداً في الحالتين ويوجد $h_1 = 1$ ونحن المعادلتين بنفس الطريقة السابقة.

مثال

إذا كان مجموع n حدًا من حدود متتالية حسابية يعطى بالقانون $u = (n + 1)$ فأوجد المتتالية وحدها الثاني عشر.

الحل

$y = 1,2$ $y = (1+1)1 = 2$ $y = 2$ عندما $x = 1$

$$z = \ell \therefore \quad r = \sqrt{\ell + \ell} \therefore \quad r = (1 + \sqrt{2}) \ell = \sqrt{2} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{2}} \therefore \quad r = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \text{ منتهى}$$

$$1 = \frac{1}{2} \therefore 12 = \frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{2} \times 24 + \frac{1}{2} \times 24 \therefore 12 = (1+2+3) \times 2 = 12 \therefore 2 = 6 \text{ عدد}$$

\therefore المتتابعة هي (2, 4, 6, 8, ...) $Y_2 = 2 \times 11 + 2 = 22 + 2 = 24$

مثال ۹۹

متابعة حسابية فيها حدها الرابع ينقص عن العدد ٤٢ بمقدار حدها الثاني وحاصل ضرب حديها الثالث والخامس يساوي ٣١٥ أوجد

١ المتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولي.

٢ عند الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع مساوياً للصفر.

الحل

$$EY = {}_1E + {}_2E$$

$$47 = 51 + 17.$$

$$L = L - 1 \quad \text{①}$$

$$67 = 5^2 + 1 + 5 + 1.$$

$$\textcircled{9} \rightarrow 99 = 54 + 45$$

$$② \rightarrow 315 = (55 + 1)(56 + 1) \therefore$$

$$315 = 7 \times 45$$

بالتعويض من ① في ②:

$$315 = (56 + 21)(21) \therefore$$

$$21 = 56 + 2$$

\therefore المتتابعة $\{ \dots, 21, 22, 23, 24, 25, \dots \}$

$$315 = [(3 -) \times 19 + 27 \times 2] \frac{29}{4} = 29$$

$$1 = [3 - x(1 - u) + 27 \times 2] \frac{u}{4} \therefore$$

② نفرض أن $u = 1$ - صغر

$$19 = u \therefore$$

$$u3 = 57 \therefore$$

$$1 = 3 + u3 = 54 \therefore$$

مثال ١٢

متتابعة حسابية مكونة من ١٥ حد ، وحدها الأوسط = ١٨ ، والنسبة بين مجموع الحدود السابقة لهذا الحد إلى مجموع الحدود التالية له هي ٥ : ١٣ أوجد هذه المتتابعة.

الحل

$$15 = n$$

١	الحد الأوسط	٢
١٢	١٨	٢٤

\therefore الحد الأوسط هو ١٨

$$18 = \frac{15 + 1}{2} = \text{ترتيب الحد الأوسط}$$

$$① \rightarrow 18 = 57 + 1 \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{\text{مجموع الحدود السابقة لـ } 18}{\text{مجموع الحدود التالية لـ } 18}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{[5(1 - u) + 12] \frac{u}{4}}{[5(1 - u) + 12] \frac{u}{4}} \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{53 + 1}{53 + 58 + 1} \therefore$$

$$539 + 13 = 550 + 15 \therefore$$

$$② \rightarrow 57 = 1 \therefore$$

يحل المعادلتين ① و ②:

$$37 = 2 \times 18 + 4 = 54 + 1 = 55$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (37, 40, 43, 46, 49, \dots)$$

لاحظ أن

الحدود التالية للحد الثامن تبدأ بـ ١٨

$$\frac{5}{13} = \frac{56 + 12}{56 + [58 + 1]2} \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{53 + 1}{53 + 58 + 1} \therefore$$

$$539 = 550 + 15 \therefore$$

$$57 = 1 \therefore$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (37, 40, 43, 46, 49, \dots)$$

مثال (١٣)

بدأ موظف حياته العملية براتب سنوي قدره ٣٠٠٠ جنيهاً وأخذ يتقاضى علاوة ثابتة قدرها ١٠٠ جنيهاً، بعد ١٥ سنة أصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيهاً سنوياً ثم أوجد مجموع المبالغ التي تقاضاها خلال تلك الفترة.

الحل

$$١٠٠ = ٥ \quad ٣٠٠٠ = ١$$

∴ $ج = (٣٠٠٠, ٣١٠٠, ٣٢٠٠, \dots)$ وهي متتابة حسابية

$$١٠٠ = ٥ \quad ٣٠٠٠ = ١$$

$$١٠٠ - ٥ = ٣٠٠٠ - ٤٤٠٠ \Rightarrow ١٠٠ \times (١ - ٥) + ٣٠٠٠ = ٤٤٠٠$$

$$\frac{١٥٠٠}{١٠٠} = ٥ \quad \therefore$$

$$١٥٠٠ = ٥ \quad ١٠٠ = ٥$$

$$١٥ = ٥$$

∴ بعد ١٥ سنة يصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيهاً

$$١٠٠ = ٥ \quad ٣٠٠٠ = ١$$

$$٥٥٥٠٠ = [١٠٠ \times ١٤ + ٣٠٠٠ \times ٢] \frac{١٥}{٤} = ١٥$$

∴ مجموع المبالغ التي يتقاضاها خلال تلك الفترة = ٥٥٥٠٠ جنيهاً

تمرين

التمرين الأول: الحسابات الحسابية

ملاحظة: لكل سؤال
نقطة واحدة
مجموع النقاط
الاحتمالية

أولاً: راجع معاً واختبر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة النهائية



أجب عن الأسئلة الآتية:

- ① إذا كان الوسط الحسابي للعديدين ١٦٤ هو ٣ فإن $..... =$
[١٠٠ د ٢ د ١٦ د ٦]
- ② إذا كان $..... = ١٥ - ٣$ فإن أول حد سالب في المتتابعة هو $.....$
[١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]
- ③ إذا كانت $.....$ ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية
للمقدار $(١ + ب)$ يساوي $.....$ [١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]
- ④ الحد الخامس في متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥
هو $.....$ [١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]

- ⑤ إذا كان ٢ من $٦٤٢ +$ من $٧٤٢ -$ من ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية
فأوجد قيمة $.....$

.....

.....

- ⑥ إذا كان مجموع الحدين الثاني والرابع من متتابعة حسابية يساوي ٢ وكان
مجموع الحدود السادس والسابع والثامن يساوي $١٥ -$ فأوجد المتتابعة

.....

.....

مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ مجموع n حداً الأولى من متتابة حسابية حدها الأول 1 وحدها الأخير 100 هو

[$\frac{n}{2}$ $(n-1) \cdot \frac{n}{2}$ $(n+1) \cdot \frac{n}{2}$ $(n+1) \cdot 2$]

٢ مجموع n حداً الأولى من متتابة حسابية حدها الأول 1 وأساسه 2 هو

[$\frac{n}{2} [2(1-n) + 12]$ $\frac{n}{2} [2(1-n) + 12]$]

[$\frac{n}{2} [2(1-n) + 12]$ $\frac{n}{2} [2(1-n) + 12]$]

٣ مجموع أول 10 أعداد زوجية في مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي

[10 90 110 110]

٤ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التي تبدأ بالعدد 1 وتنتهي بالعدد 20 يساوي

[210 210 210 210]

٥ مجموع التسعة حدود الأولى من متتابة حسابية حدها الأول 2 وحدها الأخير 18 هو

[90 90 90 90]

[25 35 45 55] $\sum_{k=1}^n (1 + 2k) = \dots\dots\dots$

٦ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التي هي أكبر من 10 وأقل من 30 تساوي

[50 110 110 110]

٧ مجموع الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على 3 ومحصورة بين 30 و 50 تساوي

[723 81 27 729]

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^n (1 - \sqrt{2})$ يساوي

[25 30 35 40]

٢ قيمة المتسلسلة $4 + 9 + 14 + \dots + 50 - 1$ باستخدام رمز التجميع هي

[$\sum_{k=1}^n (1 - \sqrt{5})$ $\sum_{k=1}^n (1 + \sqrt{5})$ $\sum_{k=1}^n (1 - \sqrt{5})$ $\sum_{k=1}^n (1 + \sqrt{5})$]

٣) [١٠٠] قيمة المتسلسلة $7 + 12 + 17 + 22$ باستخدام رمز التجميع هو

$$\left[\frac{1}{12} (2 + \sqrt{5}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (3 + \sqrt{4}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (1 + \sqrt{7}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (4 + \sqrt{2}) \right]$$

٤) [١٠٠] تكتب المتسلسلة الحسابية $3 + 7 + 11 + \dots + 35$ باستخدام رمز المجموع كالآتي:

$$\left[\frac{1}{12} (1 - \sqrt{4}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (1 - \sqrt{2}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (1 - \sqrt{3}) \right] \quad \left[\frac{1}{12} (1 - \sqrt{2}) \right]$$

٥) مجموع حدود المتتابعة الحسابية $(-12 - 8 - 4 - \dots - 124)$ يعطى عدداً

[صحيفاً موجباً] [صحيفاً سالباً] [صفر] [غير حقيقي]

٦) مجموع الستة عشر الأولى من المتتابعة الحسابية $(24 - 1000 - 819 - 24)$ يساوي

[صفر] [٢٤] [١٦] [٤٨]

١) [١٠٠] أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية $(3 - 45 - 87 - \dots)$ [١٠٠]

٢) [١٠٠] أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية $(2 - 85 - 8000 - 816)$ [١٠٠]

٣) [١٠٠] أوجد مجموع المتسلسلة $9 + 12 + 15 + \dots + 102$ [١٠٠]

٤) [١٠٠] أوجد مجموع ثلاثون حدًا الأولى من المتتابعة $3 + 52 =$ حيث $3 + 52 =$ [١٠٠]

٦) [١٠٠] متتابعة حسابية فيها $16 =$ $26 =$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها [١٠٠]

[١٠٠] [١٢٥١٢٨٠٠]

٧) [١٠٠] متتابعة حسابية فيها $12 =$ $21 =$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها [١٠٠]

[١٠٠] [١٢٥١٢٨٠٠]

٨) [١٠٠] أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتابعة الحسابية $(1 - 3 - 5 - \dots)$ ابتداء من [١٠٠]

حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٤١٠ [١٠٠]

ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٩) في المتتابعة الحسابية $(9 - 12 - 15 - \dots)$ أوجد:

١) مجموع ١٥ حدًا الأولى منها.

٢) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر

٣) عدد الحدود التي مجموعها يساوي ٧٥، ابتداء من الحد الأول. [١٠٠]

متابعة حسابية حدها الثاني يساوي ١٢ وحدها قبل الأخير يساوي ٤٨ ومجموع
حدودها يساوي ١٥٠. أوجد عدد حدودها.

(ج_٤) متتابعة حسابية فيها ج_٣ - ج_٤ = ٤ ومجموع الحدود الأربعة الأولى منها يساوي صفراً أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من هذه المتتابعة مدّة من حدها الأول ليكون مجموعها ٣٢٠

مجموع العشريين حداً الأولى من متتابعة حسابية يساوي ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد من حديها السادس بمقداره أوجد المتتابعة.

متتابعة حسابية **مناقشة** مجموع حديها الرابع والخامس = ١٣ وحاصل ضربهما = ٤٠
أوجد المتتابعة ومجموع الـ ١٠ الأولى منها. $[١٧, ١٩, ٢١, ٢٣, ٢٥, ٢٧, ٢٩, ٣١, ٣٣, ٣٥]$

٢٥ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتالية حسابية قزايكية يساوي ٢٤ ومربع حدها السادس يساوي ٣٢٤ أوجد المتتالية ثم أوجد مجموع العشرين حذا الأولى منها. [١٩٦٢ (١٩٠٠ - ١٩٠٠)]

(ج ١) متابعة حسابية فيها ج = ٩١، ح = ٩١، أوجد المتتابعة ثم أوجد حكم هذا يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول يكون مجموعها أكبر ما يمكن وأوجد هذا المجموع.

متابعة حسابية أساسها مجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوي صفر أوجد المتابعة
ثم أوجد رتبة أولى حد تزيد قيمته عن ١٢٢ في هذه المتابعة.

٢٨ في المتابعة الحسابية (١٨، ١٥، ١٢، ٩، ٦، ٣، ٠) أوجد العدد الذي تبدأ به ليكون مجموع عشرة حدود منها مساوياً (-٧٥)

مقتبحة حسابية تتكون من ٢١ حدًا مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوي ٩١
ومجموع السبعة حدود الأخيرة منها يساوي ٣٨٥ أوجد المقتبحة [١٤٤٠٠٤٦٧٤٨]

٣٠) إذا كان مجموع u حذاً من متتابعة حسابية يتعين بالقانون $u = (u - v) \cdot 2$ فأوجد v (١) ✓

٢) عند الحسود اللزيم أخذها من المتتابعة ابتداء من العدد الأول حتى يكون المجموع مساوياً - ٣٤١ -

إذا كان \mathbf{H} هو مجموع \mathbf{H} الحد الأول من المتتابعة الحسابية (\mathbf{H})

١٣٤ (٥٩) متتابعة حسابية عددا الأول يزيد عن ضعف عددا الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابي لحدديها الثالث والسادس يساوي ١٦ أوجد عددا الأول وأساسها ثم أوجد حكم حدًا يمكن أخذها من المتتابعة ابتداء من عددا الأول ليتلشى المجموع (٣٠ - ١١٤)

مقابلة حسابية مجموع الحدود الثاني والرابع والخامس منها يساوي ١٨ ومجموع الثلاثة عشر هذا الأولى منها يساوي ١٣، أوجد أول حد سالب في هذه المتتابعة ثم أوجد أول حد من حدود هذه المتتابعة يجعل مجموعها ابتداء من الحد الأول سالبًا. (٤٠ نقطة)

أسست إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها وحسبت موعداً لاستلام البني
وكان من بين شروط التعاقد أنه في حالة التأخير عن الموعد أن يدفع المسئول ١٠٠ جنيه
عرامة عن اليوم الأول وتزداد ١٠٠ جنيه عن كل يوم قال له فإذا تأخر المقاول عن تسليم هذه
الأعمال خمسة أيام **فكم** يكون إجمالي المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير ؟
(١٠٠)

مسائل تقبس مستهيات عليا في التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① مجموع حدود المتتابة الحسابية (٢٩، ٤، ٤٠٠٠، ٣٤٠٠٠، ٩٥٤) يساوي
 [٢٠١٦، ٢١٠٨، ٢٠٧٩، ٩٢٠٢]
- ② إذا كان مجموع n حداً من حدود المتتابة (٣ - ٢ - ١) يساوي -٣٦٠،
 فإن $n =$
 [٤٠، ٩، ١٨، ٢٠]
- ③ متتابة مجموع n حداً الأولى منها يعطى بالعلاقة $u_n = 2 - u_{n-1}$
 فإن حدها الخامس =
 [١٥، ٣٥، ١٠، ٧]
- ④ إذا كان مجموع n حداً من متتابة حسابية يتعين من القانون $u = (n + 1)$
 فإن حدها لعام $n =$
 [١ - ١، ١ - ٢، ١ - ٣، ١ - ٤]
- ⑤ متتابة حسابية حدودها موجبة فيها $u_p = (p)^3$ ، وإذا أضيف الواحد صحيح
 إلى كل حد من حدود هذه المتتابة أصبح الحد الثالث في المتتابة الجديدة
 $u_p = (p)^3$ فإن حدها الأول =
 [٢، ٣، ٤، ٥]
- ⑥ متتابة حسابية حدها الأولى $u = ١$ ، $u_2 = ٢$ ، $u_3 = ٣$ ، الأولى = ٦٠
 فإن $n =$
 [٣، ٤، ٥، ٦]
- ⑦ إذا كان p هو مجموع m من الأوساط الحسابية أدخلت بين العددين a ، b ، c
 هو مجموع n من الأوساط الحسابية أدخلت بين m ، n
 فإن $a : b = p$
 [١ : ٢، ٢ : ٣، ٣ : ٤، ٤ : ٥]
- ⑧ متتابة حسابية (٢، ١ + ٢، ٢ + ٣، ٣ + ٤، ...) وكان u_n الأولى = ٢
 فإن $n =$
 [$\frac{1}{4}(u - u^2)$ ، $u - u^2$ ، $\frac{1}{4}(u - u)$ ، $(u - u)$]
- ⑨ إذا كانت النسبة بين مجموع حدود عددها n من متتابعتين حسابيتين كنسبة

$$\frac{u_1 \text{ من الأولى}}{u_2 \text{ من الثانية}} : (1 + u_2) : (4 + u_2)$$
 فإن $\frac{u_1 \text{ من الأولى}}{u_2 \text{ من الثانية}} =$
 [$\frac{7}{9}$ ، $\frac{9}{7}$ ، $\frac{26}{25}$ ، $\frac{25}{26}$]

(474)



$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما تكون } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \text{عندما تكون } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{array} \right\} = u_n$$

3002 6 547 6 51]

10. $\{ \dots, 6, 4, 2, 0 \}$ is $\{ \dots, 6, 4, 2, 0 \}$



المتتابعة الهندسية

الدرس

٥

لاحظ في المتتابعة الحسابية أن كل حد يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثابت مثل المتتابعة (١، ٣، ٥، ٧، ٩، ...) وإذا طرحنا أي حد - الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت هو أساس المتتابعة ، والآن سوف ندرس نوع آخر من المتتابعات مثل المتتابعة (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...) ونلاحظ فيها أن كل حد ينتج من ضرب الحد السابق له في ٢ (أي في مقدار ثابت) وأنه عند قسمة أي حد على الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت فلاحظ في هذه المتتابعة أن:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} \text{ وهكذا } \dots$$

وفي هذه الحالة نسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية ويمكن تعريفها كما يلي:

تعريف:

تسمى متتابعة (ع_n) حيث ع_n ≠ ٠ ، متتابعة هندسية إذا كان :

$$\frac{E_n}{E_{n-1}} = \text{مقدار ثابت لكل } n \geq ٢$$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز r

$$\text{حيث: } r = \frac{u}{1+u} = \frac{u}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

أي أن: r (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أي حد من المتتابعة}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال

اكتب الأربعة حدود الأولى للمتتابعة (u, r) فيما يأتي ثم بين أيهما يكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها:

$$① (u, r) = (3 \times 2^4, 2)$$

$$② (u, r) = (1, \frac{1}{4} \times u) \text{ (حيث } u < 1)$$

الحل

$$① \text{ لإيجاد الحد الأول نضع } u = 1 \Rightarrow 3 = 1 \times 2^4$$

$$\text{لإيجاد الحد الثاني نضع } u = 2 \Rightarrow 12 = 2 \times 2^4$$

$$\text{لإيجاد الحد الثالث نضع } u = 3 \Rightarrow 24 = 3 \times 2^4$$

$$\text{لإيجاد الحد الرابع نضع } u = 4 \Rightarrow 48 = 4 \times 2^4$$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي 3، 12، 24، 48

ولعرفة ما إذا كانت المتتابعة هندسية أم لا نوجد النسبة $\frac{1+u}{u}$ فإذا كانت = مقدار

ثابت تكون المتتابعة هندسية وإذا كانت = مقدار متغير يعتمد على u فإن المتتابعة

ليست هندسية

$$\text{∴ المتتابعة هندسية} \quad \text{مقدار ثابت} = 2 = \frac{1+u}{u} \times 3 = \frac{1+u}{u} \times 3$$

② بنفس الطريقة السابقة نجد الحدود الأربعة الأولى هي 8، 4، 2، 1

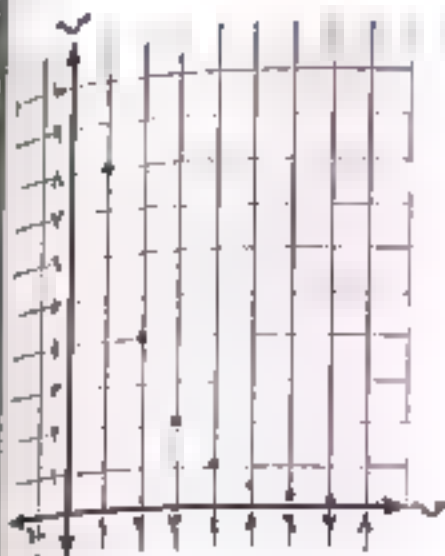
$$\text{مقدار متغير يعتمد على } u = \frac{1+u}{u} = \frac{1+u}{u} = \frac{1+u}{u}$$

∴ المتتابعة ليست هندسية

$$② \text{ ∴ } u = 1 - \frac{1}{4} \times u \text{ (حيث } u < 1)$$

∴ المتتابعة هندسية وأساسها $r = \frac{1}{4}$

⑤ التمثيل البياني للمتتابعات الهندسية



تمثيل متتابعة هندسية مثل $(\dots, 64, 128, 256, 512, \dots)$
فلنلاحظ أن:

مجال المتتابعة هو $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

ومدى المتتابعة هو $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \dots\}$

وتكون الأزواج المرتبة الممنلة للمتتابعة هي:

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 16), (6, 32), (7, 64), (8, 128), (9, 256), (10, 512), \dots\}$

ونلاحظ من الشكل البياني أن:

حدود المتتابعة متناقصة حيث $0 < r < 1$

التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية وليس دالة من الدرجة الأولى
كما في المتتابعة الحسابية

⑥ المتتابعة الهندسية المتزايدة والمتناقصية

المتتابعة الهندسية يمكن أن تكون تزايدية أو تناقصية أو متناوبة الإشارة تبعاً لحالات الأثرية:

① إذا كان r موجب، $r < 1$ فإن المتتابعة تناقصية

فمثلاً المتتابعة $(\dots, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, \dots)$

حيثما الأول $r = 1$ (عدد موجب) وأساسها $r = 2$ (عدد موجب) لذلك فإن المتتابعة تزايدية

② إذا كان r موجب، $r > 1$ فإن المتتابعة تزايدية

فمثلاً المتتابعة $(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \dots)$

حيثما الأول $r = 1$ (عدد موجب) وأساسها $r = \frac{1}{2}$ (عدد موجب) لذلك فإن المتتابعة تناقصية

③ إذا كان r موجب، $r < 1$ فإن المتتابعة تناقصية

④ إذا كان r سالب، $r < 1$ فإن المتتابعة تناقصية

⑤ إذا كان r سالب، $r > 1$ فإن المتتابعة تزايدية

⑥ إذا كان r سالب، $r < 1$ فإن المتتابعة متناوبة الإشارة

ملاحظات هامة

① أساس المتتابعة الهندسية لا يساوي صفر

② إذا كان الأساس مساوياً للواحد الصحيح فإن المتتابعة تكون ثابتة مثل المتتابعة

$(\dots, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

١٠ التحديد الأولي (العام) للمتتابعة الهندسية

إذا كان الحد الأول في متتابعة هندسية هو u والأس r فإن:

$$u_1 = u, \quad u_2 = ur, \quad u_3 = ur^2, \quad u_4 = ur^3, \quad \dots, \quad u_n = ur^{n-1}$$

نلاحظ أن: u_n يقل بمقدار الوحدة عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

أي أن: $u_1 = u, u_2 = ur, u_3 = ur^2, \dots, u_n = ur^{n-1}$ وهكذا وبالإستمرار على هذا نمط نجد أن

$$u_n = ur^{n-1} \quad \text{الحد النوني لهذه المتتابعة هو}$$

ملاحظات

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعند حدودها n فإنه يرمز لحدها الأخير

بالرمز u_n حيث $u_n = ur^{n-1}$ وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي هذه

$$u, ur, ur^2, \dots, ur^{n-1}, \frac{u}{r}, \frac{u}{r^2}, \dots, \frac{u}{r^{n-1}}$$

ونلاحظ أن: أي حد في هذه المتتابعة = قيمة الحد السابق له مباشرة \times الأس

أي أن الحد النوني (العام) بمتتابعة الهندسية هو:

$$u_n = ur^{n-1} \quad \text{أو} \quad u_n = \frac{u}{r^{n-1}} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

حيث u الحد النوني (الحد العام)، n الحد الأخير، u الحد الأول، r عند حدود المتتابعة (رتبة الحد)، u أساس المتتابعة.

١١ التحديد الثاني للمتتابعة الهندسية (الكتابة المتكررة لهذه المتتابعة)

كتابة المتتابعة الهندسية التي فيها $u = 1, r = 2$ مثلاً تلبي الآتي:

نكتب قيمة u (العدد 1) ثم نضغط علامة $\boxed{=}$ ثم نضغط على المفتاح $\boxed{\times}$ ونضع

قيمة r (العدد 2) ثم نضغط علامة $\boxed{=}$ فتعطي الحد الثاني للمتتابعة ويتكرر

الضغط على علامة $\boxed{=}$ تعطي الحدود التالية وهكذا

مثال ٢

بين أن المتتابة $(12, 36, 108, \dots)$ متتابة هندسية ثم
أوجد u_7 و u_{10} .

الحل

$$\therefore \text{المتتابة هندسية} \quad \frac{1}{1} = \frac{3}{12} = \frac{108}{36}, \quad \frac{1}{1} = \frac{12}{36} = \frac{36}{108} \therefore$$

$$\frac{3}{12} = \frac{12}{36} = \left(\frac{1}{1}\right) \times 12 = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{108}{36} = \frac{36}{12} = \left(\frac{1}{1}\right) \times 12 = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}$$

مثال ٣

أوجد المتتابة الهندسية التي حدها الثاني ١٠ وحدها الرابع ٤٠.

الحل

$$\textcircled{1} \quad 10 = \sqrt[3]{1} \quad 10 = \sqrt[3]{1}$$

$$\textcircled{2} \quad 40 = \sqrt[3]{1} \quad 40 = \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{40}{10} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} \therefore \text{بقسمة } \textcircled{2} \text{ على } \textcircled{1} :$$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \quad 4 = \sqrt[3]{1}$$



إذا كان u_n فرديًا فإننا نحصل
على قيمة واحدة للأساس (n) وإذا
كان u_n زوجيًا فإننا نحصل
على قيمتين للأساس (n) .

وتكون المتتابة هي $(5, 10, 20, 40, \dots)$

\therefore عندما $n = 1$ يكون $u = 5$

وتكون المتتابة هي $(-5, -10, -20, -40, \dots)$

وعندما $n = -1$ يكون $u = -5$

مثال

متتابعة هندسية حدها الثاني يزيد عن حدها الأول بمقدار ٣ وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد المتتابعة وأوجد رتبة الحد التي قيمته ١٩٢

الحل

$$\begin{aligned} 3 &= a_2 - a_1 \quad \therefore 3 = 1 - a_1 \quad \therefore a_1 = -2 \\ 9 &= a_3 - a_1 \quad \therefore 9 = 1 - a_1^2 \quad \therefore a_1^2 = -8 \\ \therefore \frac{9}{3} &= \frac{(1 - a_1^2)}{(1 - a_1)} \quad \text{بقسمة ② على ①} \end{aligned}$$

$$\boxed{3 = -a_1} \quad \therefore a_1 = 3 \quad \therefore \frac{9}{3} = \frac{(1 + a_1)(1 - a_1)}{(1 - a_1)}$$

$$\boxed{3 = 1} \quad \therefore a_1 = (1 - 3) \quad \therefore \text{وبالتعويض في المعادلة ①}$$

\therefore المتتابعة هي (٣، ١٢، ٤٨، ...)

لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته ١٩٢ نعوض في لحد العام

$$\begin{aligned} 192 &= a_1 \cdot r^{n-1} \quad \therefore 192 = 3 \cdot 4^{n-1} \quad \therefore 4^{n-1} = 64 \\ \therefore 4^{n-1} &= 4^3 \quad \therefore n-1 = 3 \quad \therefore n = 4 \\ \therefore 4 &= n \end{aligned}$$

مثال

متتسعة هندسية حدودها موجبة فإذا كان حدها الثالث يزيد عن حدها الخامس بمقدار ٢٠ ومجموع الحدود الثالث والرابع والخامس ٧٦ أوجد المتتابعة

الحل

$$\begin{aligned} 20 &= a_3 - a_5 \quad \therefore 20 = a_1 r^2 - a_1 r^4 \\ 76 &= a_3 + a_4 + a_5 \quad \therefore 76 = a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 \\ \text{①} \quad 20 &= a_1 r^2 (1 - r^2) \\ \text{②} \quad 76 &= a_1 r^2 (1 + r + r^2) \end{aligned}$$

بقسمة ② على ① :

$$\frac{11}{8} = \frac{v^2 + v + 1}{v^2 - 1} \therefore$$

$$1 = 11 - v + v^2 + 1 \therefore$$

$$\boxed{\frac{v}{3} = v \therefore}$$

$$\boxed{81 = 1 \therefore}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(v^2 + v + 1)^2 v}{(v^2 - 1)^2 v} \therefore$$

$$v_1 19 - 19 = v^2 8 + v 8 + 8 \therefore$$

$$1 = (v + v^8)(2 - v^3) \therefore$$

∴ الحدود موجبة

بالتعويض في المعادلة ① :

$$20 = \left(\frac{8}{9} - 1\right) \times \frac{8}{9} \times 1 \therefore$$

∴ المتتالية هي (٨١، ٥٤، ٣٦، ٢٤، ١٨، ١٢، ٩، ٦، ٤، ٣، ٢، ١)

مثال

إذا كانت (٢٤، س، ٤، ص، ٣٤، ١٠٠٠) متتالية هندسية
فأوجد قيمة سكل من س، ص وأوجد ح.

الحل

نروض أن الأساس = ص

$$\therefore \text{س} - 24 = 4 = \text{ص} \therefore 24 = 3 \times 4 = 3 \times \text{ص} \therefore$$

$$\frac{1}{8} = 3 \text{ ص} \therefore$$

$$\frac{3}{24} = 3 \text{ ص} \therefore$$

$$\boxed{\frac{1}{4} = \text{ص} \therefore}$$

$$12 = \frac{1}{4} \times 24 = \text{س} \therefore$$

$$\therefore \text{س} = 12$$

$$6 = \frac{1}{4} \times 24 = \text{ص} \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = 6$$

$$\frac{3}{8} = \left(\frac{1}{4}\right) \times 24 = 3 \sqrt{1} = \sqrt{8}$$

مثال

إذا كان الحد الأخير من متتابعة هندسية موجبة $= 256$ ومجموع الثلاث حدود الأخيرة منها $= 448$ فأوجد أساسها ، وإذا كان مجموع الثلاث حدود الأولى منها $= 14$ فأوجد المتتابعة

الحل

∴ الحد الأخير $= 256$

$$\therefore \text{مجموع الثلاث حدود الأخيرة} = 256 + \frac{256}{r} + \frac{256}{r^2} = 448$$

$$\therefore 448 = (1 + r + r^2) \frac{256}{r^2} \quad (\text{بالقسمة على } 256)$$

$$\therefore 4 = (1 + r + r^2) \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore 4 = 1 - r + r^2 - r^3$$

$$\therefore 4 = 1 - r + r^2 - r^3$$

$$\therefore \frac{4}{3} = r \quad (\text{مرفوعة}) \quad \boxed{r = 3}$$

$$\therefore 0 = (2 - r)(2 + r^3)$$

$$\therefore 14 = (r^2 + r + 1) \cdot 1$$

$$\therefore 14 = r^2 + r + 1$$

$$\boxed{r = 1}$$

$$\therefore 14 = 1 + 1 + 1$$

$$\therefore 14 = (1 + 1 + 1) \cdot 1$$

∴ المتتابعة هي $(2, 4, 8, \dots, 256)$

تمرين

راجع معاً واختم لفك

اختبار اكمي

الحدود المتتالية



1. اجب عن الأسئلة الآتية :

- ① تسمى المتتالية التي قد عدتها $u_n = 1 + n$ بأنها متتالية
[تزايدية () تناقصية () ثابتة ()]
② تكتب المتسلسلة الحسابية $3 + 7 + 11 + \dots + 35$ باستخدام رمز المجموع على الصورة

$$\left[\sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \right]$$

- ③ إذا كان $1 + 2 + 3 + \dots + 17 = 153$ ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية
فإن $1 = \dots$
④ مجموع المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=1}^n (1 + 2^k) = \dots$
[16 () 17 () 18 () 19 ()]

⑤ في المتسلسلة الحسابية $(3 + 6 + 9 + 12 + \dots)$ أوجد :

- (أ) مجموع 10 حذاً الأولى منها
(ب) مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من الحد الخامس (إلى الخامس عشر)

- ⑥ أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية التي حذاً الأولى يساوي 3 وحذاً الأخير يساوي 39 ومجموعه حذاً الأولى منها يساوي 110

ثانياً مسائل المستوى الأول

٢١) في المتتابة الهندسية (٣، ١٢، ٤٨، ...) أوجد شكل من: $٤, ٤, ٤, ٤$ [١٣٨، ٩١]

٢٢) بين أن المتتابة (٢، ٨، ٣٢، ...) متتابة هندسية وأوجد ٤ [٦٧٤]

٢٣) متتابة هندسية حدها الأول = ٤ وأساسها = ٢

أكتب الخمسة حدود الأولى منها. [٦٤٤، ٣٢٤، ٣١٤، ٨١٤]

٢٤) متتابة هندسية أساسها = ٢ وحدها التاسع = ٢٥٦

أوجد المتتابة وأوجد $٤, ٤, ٤, ٤$ [٦٤٤، ٣٩١، ...، ٤٤٤، ٣٤١]

٢٥) في المتتابة (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...) أوجد $٤, ٤, ٤, ٤$ الحد النوني $\left[١ - \left(\frac{1}{4} \right)^n \times ١٥٤ + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right]$

٢٦) أوجد عدد حدود المتتابة (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤، ١٢٨، ...) $\left(\frac{1}{8} \right)$ [١٣]

٢٧) متتابة هندسية أساسها = $\frac{1}{4}$ وحدها الثالث = ٢٤ أوجد هذه المتتابة.

[١ - ٢٤، ٤٨، ٩٦]

٢٨) في المتتابة الهندسية (١، ٣، ٩، ...) أوجد $٤, ٤, ٤, ٤$ [١٩٦، ٣٠٨]

٢٩) أذكر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) الحد الخامس من المتتابة (٤، ١٦، ٦٤، ...) حيث $٢ = ٢ \times (٣)^{١-٥}$ يساوي

[١١٢ د ٢١٦ د ١٦٢ د ٨٩]

٢) الحد السابع من المتتابة الهندسية (٦٤، ٣٢، ١٦، ...) هو

[١ د ٢ د $\frac{1}{2}$ د ٤]

٣) الحد النوني للمتتابة الهندسية (٣، ١٢، ٤٨، ...) هو

[٣(٢-)^٥ د ٣(٢-)^{١-٥} د ٣(٢)^٥ د ٣(٢)^{١-٥}]

٤) الحد السادس من متتابة الهندسية (٢، ٨، ٣٢، ...) هو

[٧٤ د ٤٨ د ٦٩ د ٩٦]

٥) الحد السادس من المتتابة الهندسية $\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{٢٤٣} \right)$ هو

[١ د ٢ د $\frac{1}{4}$ د ٩]

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١) الحد التالي في المتتابعة الهندسية $(\dots, \frac{27}{8}, \frac{9}{4}, 6, 8, \dots)$ هو

[$\frac{81}{27}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{16}$, $\frac{11}{8}$]

٢) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة

[$(1, 2, 4, 8, \dots)$, $(1, 2, 3, 4, \dots)$, $(1, 2, 4, 8, \dots)$, $(1, 2, 4, 8, \dots)$]

[$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$]

٣) تمثل حدود المتتابعة الهندسية مجموعة من النقاط المنفصلة التي تقع على

[استقامة واحدة , منحنى دالة تربيعية , منحنى دالة أسية , منحنى دالة تكعيبية]

منحنى دالة أسية , منحنى دالة تكعيبية]

٤) تسمى المتتابعة (u_n) هندسية إذا كان يساوي مقدار ثابت (لكل $n \geq 1$)

[$\frac{u_n}{1+u_n}$, $u_n - 1 + u_n$, $1 + u_n - u_n$, $\frac{u_n}{1+u_n}$]

٥) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هي

[$(u_n) = (2^n)$ لكل $n \leq 1$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 2$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 1$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 2$]

[$(u_n) = (2^n)$ لكل $n \leq 1$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 2$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 1$, $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$ لكل $n \leq 2$]

٦) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها وحدها الأول موجباً .

[$[-1, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, 0]$]

مسائل المستوى الثاني

١) بين نوع متتابعة $(u_n) = 5 \times 2^n$ قم أوجد حدودها الثلاثة الأولى [٣, ٢, ١, ١]

٢) أثبت أن المتتابعة $(u_n) = 2^{n+1}$ هي متتابعة هندسية وأكتب الأربعة حدود الأولى منها .

[٣, ٢, ١, ١]

٣) أثبت أن المتتابعة التي حدها النوني يساوي $2 \times 3^n - 2^n$ متتابعة هندسية ثم

أوجد حدها السابع

[١٠]

١٦) أوجد عند حدود المتتابعة (١٤٥٨٤ - - - ٤٩٨٤٦٤٢) (١٤)

٢) في المتتابعة الهندسية $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots)$ أوجد :

(أ) حدها العاشر. (ب) رتبة الحد الذي قيمته $1024 = 2^9$ (١٥)

٧) أوجد رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح في المتتابعة (٧٢٩٤٧٢٣٤٢٤٨٩٤٠٠٠) (١٦)

٨) متتابعة هندسية حدها الرابع = ٨ وحدها السابع = ٦٤ أوجد هذه المتتابعة. (١٧)

٩) متتابعة هندسية فيها $u_7 = 192$ ، $u_8 = 384$ أوجد المتتابعة. (١٨)

١٠) متتابعة هندسية حدها الثاني $\frac{1}{4}$ وحدها الخامس $\frac{1}{256}$ أوجد هذه المتتابعة $(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$ (١٩)

١١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وحدها الأول يساوي أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثاني والخامس = ٣٦ أوجد هذه المتتابعة. (٢٠)

١٢) متتابعة هندسية حدها الأول $\frac{1}{4}$ وحدها الأخير ٦٤ وعدد حدودها ٨ أوجد المتتابعة. (٢١)

١٣) متتابعة هندسية حدها الرابع يساوي ١٢ ومجموع حديها الثالث والخامس ٣٠ أوجد المتتابعة. (٢٢)

١٤) متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث يساوي ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوي ٦٥ بين أن هناك متتابعتين وأوجد هما. (٢٣)

١٥) إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتابعة هندسية = ٩ ومجموع الحدين السادس والسابع منها يساوي ٢٨٨ فأوجد المتتابعة. (٢٤)

١٦) متتابعة هندسية حدها الثالث يزيد عن حدها الثاني بمقدار ١٦ وحدها الثاني يزيد عن حدها الأول بمقدار ٤ أوجد المتتابعة. (٢٥)

١٧) متتابعة هندسية أساسها عند صحيح موجب فيها $u_1 \times u_2 = u_3$ ، $u_1 = 3$ أوجد المتتابعة. (٢٦)

١٨ متتابعة هندسية فيها $u_5 = 5$ ، $\frac{u_7}{u_4} = \frac{1}{2}$ أوجد المتتابعة. $\left[\left(1, \frac{5}{4}, \frac{25}{16}, \frac{125}{64}, \dots \right) \right]$

١٩ (ع) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان $u_1 + u_3 = 10$ ، $u_2 + u_4 = 20$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٨٠. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٠ (ع) متتابعة هندسية فيها $u_1 = 1$ ، $u_2 = 2$ ، $u_3 = 4$ ، $u_4 = 8$ ، $u_5 = 16$ أوجد المتتابعة ثم أوجد u_6 ، u_7 ، u_8 . $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢١ متتابعة هندسية حدودها موجبة فإذا كان الفرق بين الحدين الثالث والخامس منها ٢٠ ومجموع الحدود الثالث والرابع والخامس ٧٦ أوجد هذه المتتابعة. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٢ (ع) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها u_1 يزيد عن u_2 بمقدار ٢٩، u_3 ينقص عن u_4 بمقدار ٣ أوجد المتتابعة. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٣ مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية ٢٦ ومجموع الثلاثة حدود التالية لها ٦٦٨ أوجد المتتابعة. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٤ متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث يساوي ١٢ وحاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوي ٢٧ أوجد هذه المتتابعة. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٥ إذا كانت (ك) ٢٤، (ل) ٣٠، (م) ١٠ متتابعة هندسية أوجد قيمة (ن). $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٦ إذا كانت الكميات س - ٢، س + ٤، س + ٧ هي الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة هندسية حدودها موجبة فأوجد س ثم أوجد الحد السابع منها. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٧ (ع) موظف راتبه الشهري ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٩٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه في السنة السادسة. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٨ ثلاث أعداد تكون متتابعة هندسية بحيث يكون مجموعها ٢١ وحاصل ضربها يساوي ٩٨ أوجد هذه الأعداد. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٢٩ (ع) س، ص، ع، م، ح، ٦٤، ١٠٠٠ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة أوجد قيم س، ص، ع، م، ح. $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]$

٣٦ متتابعة هندسية النسبة بين مجموع حديها الأول والثالث إلى مجموع حديها الثاني والرابع = ٣ : ١ وحدها السادس = ٣٣ أوجد المتتابعة وحدها التاسع. $[28611, \dots, 11, 211]$

٣٧ الوسط الحسابي بين الحدين الثاني والرابع من متتابعة هندسية يساوي ١٥ وحاصل ضرب حدها الأول في حدها الخامس يساوي تسعة أمثال حدها الثالث أوجد المتتابعتين. $[1, \dots, 19127181], [1, \dots, 191311]$

٣٨ ثلاث أعداد تكون متتابعة هندسية بحيث يكون حاصل ضربهم $\frac{343}{64}$ ومجموع مقلوباتها = ٢ فما هي هذه الأعداد ؟ $[\frac{7}{8}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}]$

مسائل تقيس مستويان عليا في التفكير

٣٩ متتابعة هندسية متزايدة فيها مجموع الحدين الثاني والثالث يساوي ١٨ ومجموع المعكوس الضربي لكل من الحدين الأول والثاني = $\frac{1}{4}$ أوجد المتتابعة. $[1, \dots, 1121613]$

٤٠ إذا كانت $(2, b, c, d, -)$ متتابعة هندسية وكان $b + c = 16$ و $d = \frac{1}{4}$ أوجد المتتابعة وأوجد c . $[\frac{1}{128}, \dots, 1121613]$

٤١ ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٨ ومجموع مربعاتها ٣٣٦ فما هي هذه الأعداد. $[191811]$

٤٢ أوجد المتتابعة الهندسية التي أساسها $\frac{1}{3}$ وفيها $u_2 = 2$ و $u_3 = 1$. $[1, \dots, 19127181]$

٤٣ المتتابعة (u_n) معرفة بحيث $u_1 = 1$ و $u_2 = \frac{1}{3}$ وبين نوعها، وإذا كانت النسبة بين مربع حدها الثاني ومجموع الحدين الثالث والخامس هي ٨ : ٥ فأوجد المتتابعة. $[1, \dots, 1121613]$

٤٤ متابعتان هندسيتان الحد الأول في كل منهما ١٦ ومجموع الثلاثة حدود الأولى منها ٢٨ أوجد هاتين المتابعتين. $[1, \dots, 19127181], [1, \dots, 191311]$

٤٥ إذا كانت u, b, c, d متتابعة هندسية فأثبت أن $u + b + c + d$ تكون أيضًا متتابعة هندسية.

یساوی $ad - bc \neq 0$ ہے۔

② في المتابعة الهندسية (٢٥٦، ١٢٨، ٦٤٤، ١٠٠٠) فإن رقبة أول حد أصغر من الواحد

الشيخ محمد بن عبد الوهاب

③ في المتابعة الهندسية (١٢:٦٤) : القيمة أول حد تزيد قيمته عن ٢١٠ يساوي

① متتابعة هندسية أساسها 2 $2 = 2^1$ $4 = 2^2$ $8 = 2^3$ $16 = 2^4$ $32 = 2^5$ $64 = 2^6$ $128 = 2^7$ $256 = 2^8$ $512 = 2^9$ $1024 = 2^{10}$ $2048 = 2^{11}$ $4096 = 2^{12}$ $8192 = 2^{13}$ $16384 = 2^{14}$ $32768 = 2^{15}$ $65536 = 2^{16}$ $131072 = 2^{17}$ $262144 = 2^{18}$ $524288 = 2^{19}$ $1048576 = 2^{20}$ $2097152 = 2^{21}$ $4194304 = 2^{22}$ $8388608 = 2^{23}$ $16777216 = 2^{24}$ $33554432 = 2^{25}$ $67108864 = 2^{26}$ $134217728 = 2^{27}$ $268435456 = 2^{28}$ $536870912 = 2^{29}$ $1073741824 = 2^{30}$ $2147483648 = 2^{31}$ $4294967296 = 2^{32}$ $8589934592 = 2^{33}$ $17179869184 = 2^{34}$ $34359738368 = 2^{35}$ $68719476736 = 2^{36}$ $137438953472 = 2^{37}$ $274877906944 = 2^{38}$ $549755813888 = 2^{39}$ $1099511627776 = 2^{40}$ $2199023255552 = 2^{41}$ $4398046511104 = 2^{42}$ $8796093022208 = 2^{43}$ $17592186044416 = 2^{44}$ $35184372088832 = 2^{45}$ $70368744177664 = 2^{46}$ $140737488355328 = 2^{47}$ $281474976710656 = 2^{48}$ $562949953421312 = 2^{49}$ $1125899906842624 = 2^{50}$ $2251799813685248 = 2^{51}$ $4503599627370496 = 2^{52}$ $9007199254740992 = 2^{53}$ $18014398509481984 = 2^{54}$ $36028797018963968 = 2^{55}$ $72057594037927936 = 2^{56}$ $144115188075855872 = 2^{57}$ $288230376151711744 = 2^{58}$ $576460752303423488 = 2^{59}$ $1152921504606846976 = 2^{60}$ $2305843009213693952 = 2^{61}$ $4611686018427387904 = 2^{62}$ $9223372036854775808 = 2^{63}$ $18446744073709551616 = 2^{64}$ $36893488147419103232 = 2^{65}$ $73786976294838206464 = 2^{66}$ $147573952589676412928 = 2^{67}$ $295147905179352825856 = 2^{68}$ $590295810358705651712 = 2^{69}$ $1180591620717411303424 = 2^{70}$ $2361183241434822606848 = 2^{71}$ $4722366482869645213696 = 2^{72}$ $9444732965739290427392 = 2^{73}$ $18889465931478580854784 = 2^{74}$ $37778931862957161709568 = 2^{75}$ $75557863725914323419136 = 2^{76}$ $151115727451828646838272 = 2^{77}$ $302231454903657293676544 = 2^{78}$ $604462909807314587353088 = 2^{79}$ $1208925819614629174706176 = 2^{80}$ $2417851639229258349412352 = 2^{81}$ $4835703278458516698824704 = 2^{82}$ $9671406556917033397649408 = 2^{83}$ $19342813113834066795298816 = 2^{84}$ $38685626227668133590597632 = 2^{85}$ $77371252455336267181195264 = 2^{86}$ $154742504910672534362390528 = 2^{87}$ $309485009821345068724781056 = 2^{88}$ $618970019642690137449562112 = 2^{89}$ $1237940039285380274899124224 = 2^{90}$ $2475880078570760549798248448 = 2^{91}$ $4951760157141521099596496896 = 2^{92}$ $9903520314283042199192993792 = 2^{93}$ $19807040628566084398385987584 = 2^{94}$ $39614081257132168796771975168 = 2^{95}$ $79228162514264337593543950336 = 2^{96}$ $158456325028528675187087900672 = 2^{97}$ $316912650057057350374175801344 = 2^{98}$ $633825300114114700748351602688 = 2^{99}$ $1267650600228229401496703205376 = 2^{100}$ $2535301200456458802993406410752 = 2^{101}$ $5070602400912917605986812821504 = 2^{102}$ $10141204801825835211973625643008 = 2^{103}$ $20282409603651670423947251286016 = 2^{104}$ $40564819207303340847894502572032 = 2^{105}$ $81129638414606681695789005144064 = 2^{106}$ $162259276829213363391578010288128 = 2^{107}$ $324518553658426726783156020576256 = 2^{108}$ $649037107316853453566312041152512 = 2^{109}$ $1298074214633706907132624082305024 = 2^{110}$ $2596148429267413814265248164610048 = 2^{111}$ $5192296858534827628530496329220096 = 2^{112}$ $10384593717069655257060992658440192 = 2^{113}$ $20769187434139310514121985316880384 = 2^{114}$ $41538374868278621028243970633760768 = 2^{115}$ $83076749736557242056487941267521536 = 2^{116}$ $166153499473114484112975882535043072 = 2^{117}$ $332306998946228968225951765070086144 = 2^{118}$ $664613997892457936451903530140172288 = 2^{119}$ $1329227995784915872903807060280344576 = 2^{120}$ $2658455991569831745807614120560689152 = 2^{121}$ $5316911983139663491615228241121378304 = 2^{122}$ $10633823966279326983230456482242756608 = 2^{123}$ $21267647932558653966460912964485513216 = 2^{124}$ $42535295865117307932921825928971026432 = 2^{125}$ $85070591730234615865843651857942052864 = 2^{126}$ $170141183460469231731687303715884105728 = 2^{127}$ 3402823669209384634633

طیان حیدرہما الاول = ۱۰۸۸ھ

⑤ متتابعة هندسية فيها $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 8, \dots$

⑥ إذا كان $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ فاحسب $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

فیلڈس کے 11 سرگرمیوں کی

[H d 12 d 10 d 8]

الأوساط الهندسية

الأخرى

٦

علّم أن الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين حدين متتاليين في المتتابعة الحسابية وأيضا الأوساط الهندسية هي الحدود الواقعة بين حدين متتاليين في المتتابعة الهندسية ويمكن إيجاد الوسط الهندسي كما بالتعريف التالي :

تعريف

إذا كانت a, b, c ثلاث حدود متتالية من متتابعة هندسية فإنه يقال أن b هي الوسط الهندسي بين الكميتين a, c حيث $b^2 = ac$ أو $b = \sqrt{ac}$ أو $b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$

ملاحظات هامة

- لإيجاد الوسط الهندسي لـ n كميتين لابد وأن تكون الكميتين لهما نفس الإشارة ، أما إذا كانت إحدى الكميتين موجبة والأخرى سالبة فإنه لا يوجد لهما وسط هندسي حقيقي .
- عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة - ٢ = $n - ٢$
- عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢
- الوسط الذي ترتيبه (r) من البداية هو r^2 فمثلاً الوسط السادس هو ٦^2 وهكذا ...



تعريف

الوسيط الهندسي لعدة كميات موجبة عندها n هو الجذر النوني الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعاً أي أن الوسيط الهندسي لهذه الكميات $= \sqrt[n]{\text{حاصل ضرب هذه الكميات}}$

مثال ٣

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٣ و ٤٨

الحل

ملاحظة

إذا سأل عدد الأوساط المطلوبة زوجياً فليس هناك مجموعة واحدة من الأوساط (حل وحيد) أما إذا كان عدد الأوساط المطلوباً فردياً فإن هناك مجموعتين من الأوساط (حليتين)

عدد الأوساط = ٣ • عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥

$$٣ = ١, ٤٨ = ١, ٣ = ١, ٤٨ = ١, ٣ = ١, ٤٨ = ١, ٣ = ١$$

$$٤٨ = ٣, ٣ = ٣, ٤٨ = ٣, ٣ = ٣, ٤٨ = ٣, ٣ = ٣$$

$$\text{عندما } r = ٣ \text{ الأوساط هي } ٢٤, ١٢, ٦$$

$$\text{عندما } r = ٣ \text{ الأوساط هي } ١٢, ٦, ٣$$

مثال ٤

عدنان وسطيها الحسابي ١٧ ووسطها الهندسي ٥ أوجد العددين

الحل

نفرض أن العددين x, y

$$\text{١} \quad \text{الوسيط الحسابي} = \frac{x+y}{2} = ١٧$$

$$\text{٢} \quad \text{الوسيط الهندسي} = \sqrt{xy} = ٥$$

بالتعويض من ١ في ٢ :

$$٢٢٥ = (x+y)(x-y)$$

$$١ = (٢٥ - ١)(٩ - ١)$$

$$٩ = ١ \quad ٢٥ = ٩$$

• العددين هما ٩ و ٢٥

مثال ٣

إذا أدخلت ٥ أوساط هندسية بين عددين وسكن مجموع الوسطين الأول والثالث = ١٠ ومجموع الوسطين الثاني والرابع = ٣٠ فما هي هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن الحد الأول a والأساس r

∴ الوسط الأول $a, r, ar, ar^2, ar^3, ar^4$ الثاني ar, ar^2, ar^3, ar^4 الثالث ar^2, ar^3, ar^4 الرابع ar^3, ar^4

$$\textcircled{1} \quad 10 = ar + ar^3 \quad \textcircled{2} \quad 30 = ar^2 + ar^4$$

يقسمه $\textcircled{2}$ على $\textcircled{1}$:

$$\frac{30}{10} = \frac{ar^2 + ar^4}{ar + ar^3} \quad \therefore 3 = \frac{(r^2 + 1)r^2}{(r + 1)r} \quad \therefore 3 = r$$

بالتعويض في $\textcircled{1}$:

$$\frac{1}{3} = 1 \quad \therefore 1 = 30 \quad \therefore 10 = 1 + 27 + 9 + 3$$

∴ الأوساط هي ١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١

مثال ٤

إذا كانت $1, 12, 17, 19, 3$ ثلاث حدود متتالية في متتابعة هندسية فأوجد قيمتها

الحل

∴ المتتابعة هندسية $1, 12, 17, 19, 3$ وسط هندسي بين 1 و 3

$$1 + 3 = 12 \quad \therefore (1 + 3) = 12 \quad \therefore 1 + 3 = 12$$

$$1 + 3 = 12 \quad \therefore 1 + 3 = 12 \quad \therefore 1 + 3 = 12$$

$$\frac{1+3}{1} = 12 \quad \therefore 1 + 3 = 12$$

$$1 + 3 = 12$$

مثال

ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعها ٣٩ وإذا طرح من العدد الأوسط ٨ فكانت الأعداد الناتجة في تتابع هندسي أوجد هذه الأعداد.

الحل

نفرض أن الأعداد هي $x - 1, x, x + 1$

$$39 = (x-1) + x + (x+1) \quad \therefore 39 = 12 \quad \therefore x = 13$$

\therefore الأعداد هي $12, 13, 14$

وعند طرح ٨ من العدد الأوسط تصبح الأعداد $12, 5, 14$ هي تتابع هندسي

$$(x+13)(x-13) = 5 \quad \therefore x^2 - 169 = 5 \quad \therefore x^2 = 174$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{174} \quad \therefore \text{الأعداد هي } 12, 13, 14$$

مثال

ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٦ وإذا طرح من الأول الواحد أصبح طرح من الثاني ٢ وطرح من الثالث ١١ فكانت الأعداد الناتجة في تتابع حسابي أوجد الأعداد

الحل

نفرض أن الأعداد هي a, ar, ar^2

$$26 = a + ar + ar^2 \quad \text{①}$$

$$11 - a - ar = 1 \quad \therefore 10 - ar = 1 \quad \therefore ar = 9$$

$$12 - a - ar = 2 \quad \therefore 10 - ar = 2 \quad \therefore ar = 8$$

$$8 = a(1 + r - r^2) \quad \text{②}$$

بقسمة ① على ②:

$$\frac{26}{8} = \frac{a(1 + r + r^2)}{a(1 + r - r^2)} \quad \therefore \frac{13}{4} = \frac{1 + r + r^2}{1 + r - r^2}$$

$$\therefore 13(1 + r - r^2) = 4(1 + r + r^2) \quad \therefore 13 + 13r - 13r^2 = 4 + 4r + 4r^2$$

فيكون الوسط الحسابي بعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من
وسطهما الهندسي

أي أن

إذا كان a, b, c هـ ثلاث حدود متتالية في متتابعة هندسية فإن $\frac{a+b}{2} < c$

إذا كان a, b, c هـ ثلاث حدود متتالية في متتابعة حسابية فإن $c < \frac{a+b}{2}$

إذا كانت $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$ أعداد حقيقية موجبة فإن:

$$\frac{a + b + c + d + e + f + g + h + i + j + k + l + m + n + o + p + q + r + s + t + u + v + w + x + y + z}{n} < \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h \cdot i \cdot j \cdot k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot o \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z}$$

ولتحقق المساواة فقط عندما $a = b = c = d = e = f = g = h = i = j = k = l = m = n = o = p = q = r = s = t = u = v = w = x = y = z$

مثال

إذا كانت: $12, 3, 4, 5$ هـ أعداد موجبة في تتابع هندسي

فانبت أن: $(4+12) < (5+3)$ هـ $48 < 15$ هـ

الحل

الوسط الحسابي < الوسط الهندسي

$$3 < \frac{12+3}{2} \quad 4 < \frac{4+12}{2} \quad 5 < \frac{5+3}{2}$$

$$1 < \frac{1+12}{2} \quad 2 < \frac{2+3}{2} \quad 3 < \frac{3+4}{2} \quad 4 < \frac{4+5}{2} \quad 5 < \frac{5+12}{2}$$

من ①، ② بالضرب:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 < \frac{(1+12)(2+3)(3+4)(4+5)(5+12)}{2^5}$$

تمرين

على الأعداد الحقيقية

الاجابة الصحيحة
عامة وحيدة
بعض اعداد
البرهان

أولاً راجع معنا واكمل نفسك

اختيار تم اكملي

الدرجة النهائية



اجب عن الاسئلة الآتية

- ① متتابعة هندسية u_n - $u_1 = \frac{3}{2}$ فإن أساس المتتابعة =
 $\left[\frac{3}{2} \quad 3 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \right]$
- ② الحد العاشر من المتتابعة التي حدها $u_n = \frac{1}{n}$ حيث $n \geq 1$ هو
 $\left[\frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{4}{25} \right]$
- ③ الحد الخامس من المتتابعة (u_n) حيث $u_n = 2 \times (3)^{n-1}$ يساوي
 $[76 \quad 286 \quad 81 \quad 192 \quad 16]$
- ④ في المتتابعة الهندسية $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 1, 4, \dots \right)$ رتبة الحد الذي قيمته يساوي 128 هي
 $[10 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15]$
- ⑤ (u_n) متتابعة هندسية حدها موجبة فيها $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{2}$ أوجد المتتابعة

- ⑥ مسرح يتسع لـ 16 صفًا فإذا كان الصف الأول يحتوي على 16 مقعدًا وكان صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار 4 مقاعد كم عدد المقاعد بهذا المسرح ؟

ثانياً مسائل المستوى الأول

- ١ أوجد الوسط الهندسي بين ٤ و ٢٥
- ٢ أوجد الوسط الهندسي بين ١٦ و ٩
- ٣ ادخل أربعة أوساط هندسية بين ١ و ٢٤٣
- ٤ ادخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين ٥ و ٣٢٠
- ٥ ادخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{1}{4}$ و ٣٢
- ٦ ادخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين $\frac{8}{27}$ و $\frac{27}{8}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١ الوسط الهندسي للعدين ٤ و ١٦ هو
[٨] [٤] [٦٤] [٨ ±] [٣٢]
- ٢ إذا كان الوسط الهندسي للعدين ٤ و ٩ هو ١٥ فإن من تساوي
[٣] [٢٥] [٥] [١٥]
- ٣ إذا كانت a, b, c ثلاث حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن $b > \dots$
[$\frac{a}{c}$] [$\frac{a+c}{2}$] [$a + c$] [$a - c$]
- ٤ إذا كان الوسط الهندسي للعدين ٤ و ٩ هو ٨ فإن قيمة $a = \dots$
[٨] [٤] [١٦] [٣٢]

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١ الوسط الحسابي للعدين حقيقيين موجبين مختلفين من وسطهما الهندسي.
[$=$] [$>$] [$<$] [$<$]
- ٢ الوسط الهندسي الموجب للكميتين a, b هو
[a^2b] [a^2b^2] [a^2b^2] [a^2b^2]
- ٣ إذا كان الحدين الأوسطين في متتابعة هندسية هما ٢ و ٤ على الترتيب فإن أساسها هو
[$\frac{1}{2}$] [٨] [٦] [٢]
- ٤ الوسط الهندسي للأعداد ١٢، ٩، ٤ يساوي
[٢] [٩] [٦] [١٢]
- ٥ إذا كان a, b, c ثلاث حدود موجبة ومتتالية من متتابعة هندسية فإن
[$\frac{a}{c} < b < \frac{a+c}{2}$] [$\frac{a}{c} > b > \frac{a+c}{2}$] [$\frac{a}{c} = b = \frac{a+c}{2}$] [$\frac{a}{c} = b = \frac{a+c}{2}$]

- ١) عددان موجبان مجموعهما ٢٠ ووسطهما الهندسي ٨ فما هما العددان ؟ [١١٤]
- ٢) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسي ٣ فما هما العددان ؟ [١١٩]
- ٣) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي ٥ ووسطهما الهندسي ٣ [١٢١]
- ٤) عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ٢٥ ووسطهما الهندسي ٢٠ فما العددان ؟ [١٢٦]

مسائل المستوى الثاني

- ٨) الوسط الحسابي لعددين $\frac{5}{3}$ ووسطهما الهندسي ٤ وأصغر العددين يساوي ٩ أوجد العدد الآخر [٨٩]
- ٩) إذا أدخلت ٤ أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع = ٩٠ ومجموع الوسطين الثاني والثالث = ٩٠ أوجد العددين. [٥٤٦٠]
- ١٠) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ و١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هي ١ : ٢٧ أوجد عدد تلك الأوساط. [٥]
- ١١) إذا كان الوسط الهندسي بين س، ص هو ٩ والوسط الحسابي بين (س + ٤)، (ص + ٦) هو ١٥ فأوجد قيمتي س، ص [١٨٠٦]
- ١٢) متتابعة هندسية متزايدة جميع حدودها موجبة، إذا كان الوسط الحسابي لحدديها الثاني والرابع يساوي ٩٨ والوسط الهندسي الموجب لهما يساوي ٣٢ أوجد المتتابعة. [١٠٤٣٢١٨١٢٢]
- ١٣) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسي الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ [٩١٤]
- ١٤) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد الصحيح والوسط الحسابي لحدديها الثالث والخامس يساوي ٣٠ والوسط الهندسي الموجب لهما يساوي ٢٤ أوجد المتتابعة. [١٠٤١٨١٩١٩١٩٢]

١٢ الوسط الحسابي بين الحدين الأول والرابع من متتابة هندسية هو $\frac{1}{4}$ والوسط الحسابي بين حديها الثاني والثالث هو $\frac{1}{2}$.
 أثبت أنه توجد متتايعتان هندسيتان وأوجدتهما .

١٣ متتابة حسابية حدها الأول - ٤ وحدودها الثاني والخامس والحادي عشر تكون متتابة هندسية أوجد المتتابة

١٤ ثلاثة أعداد في تتابع هندسي مجموعها ١٣ وإذا أضيف لحدها الأوسط ٢ تكونت التواتج متتابة حسابية أوجد الأعداد .

١٥ (ع) متتابة حسابية فيها $a_4 = 19$ وحدودها a_1, a_2, a_3 في تتابع هندسي أوجد المتتابة الحسابية .

١٦ متتابة حسابية تزايدية حدها الثامن يساوي ١٥ وحدودها a_1, a_2, a_3 تكون متتابة هندسية أوجد المتتابة الحسابية .

١٧ متتابة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها ٥ وحدودها الأول والثاني والخامس في تتابع هندسي أوجد المتتابة الحسابية .

١٨ ثلاثة أعداد موجبة في تتابع حسابي مجموعهم ١٥ وإذا ضرب أصغرهما في ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧ تكونت الأعداد الناتجة متتابة هندسية أوجد حدود المتتابة الحسابية .

١٩ ثلاثة أعداد في تتابع هندسي مجموعها ١٣ وإذا ضرب العدد الثاني في ٢ وضرب العدد الثالث في ٣ وكانت الأعداد الثلاثة الجديدة في تتابع حسابي أوجد هذه الأعداد .

٢٠ ثلاثة أعداد تكون متتابة هندسية مجموعها ٣٥ وإذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ صارب لأعداد الثلاثة في تتابع حسابي أوجد هذه الأعداد .

٢١ إذا قسمت الحدود الثلاثة الأولى من متتابة هندسية على ٦ ، ٤ ، ٣ على الترتيب فإن التواتج تكون في تتابع حسابي أثبت أن هاتين متتايعتين .

١٦ إذا كانت (١، ١، ١، ١) متتابعة حسابية، (١، ١، ١، ١) متتابعة هندسية
فاحسب قيمة كل من ١، ١ حيث ١ ≠ ١

١٧ إذا كانت (١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع هندسي
اثبت أن: (١ + ١) (١ + ١) < ١٢

١٨ إذا كان (١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع هندسي
فاثبت أن: (١ + ١) (١ + ١) < ١٤

١٩ إذا كانت (١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع حسابي فاثبت أن:
١) ١ < ١٢ و ٢) ١ + ١ < ١ + ١

مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) إذا كانت (١، ١، ١، ١) في تتابع هندسي فإن

٢) الوسط الهندسي للأعداد ١، ١، ١ هو

٣) إذا كانت (١، ١) متتابعة هندسية حيث ١ = (١ - ١) فإن الوسط الهندسي بين

٤) إذا كان (١ - ١) وسط هندسي بين العددين (١ - ١) و (١ - ١) فإن ١ =

٥) الوسط الهندسي للأعداد ١، ١، ١، ١ هو

٦) إذا كانت (١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١) كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية

٧) إذا كانت ١ هي الوسط الحسابي بين ١ و ١ وكانت ١ هي الوسط الهندسي بينهما

٨) إذا كانت (١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١) كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية



المتسلسلات الهندسية

الدرس

٧

سبق أن علمنا أن المتسلسلة هي مجموع حدود متتالية وتعلمنا كيفية إيجاد المتسلسلة الحسابية والآن سوف نتعرف على كيفية إيجاد المتسلسلة الهندسية

مجموع المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية ويرمز لمجموع n حذا منها بالرمز S_n

مجموع n حذا الأولى من متسلسلة هندسية

أولاً إيجاد مجموع n حذا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$ متسلسلة هندسية حدها الأول 1 وأساسها r فإنه يمكن إيجاد المجموع S_n لهذه المتسلسلة كما يلي :

$$\text{من } 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = S_n \quad (1)$$

وبضرب الطرفين في r فإن :

$$r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = rS_n \quad (2)$$



وبطرح المعادلتين يكون:

$$r - r^n = 1 - r^n$$

$$\text{أي أن } r^n = (r-1) \quad (r^n - 1) = (r-1)$$

$$\therefore r^n = \frac{(r-1)}{r-1} \quad r \neq 1$$

مثال

أوجد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتالية الهندسية (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...)

الحل

$$2 = \frac{r}{1} = r \quad \therefore r = 2$$

$$1 = 1$$

$$127 = \frac{(1 - 2^7) \times 1}{1 - 2} = r \quad \therefore r = 127$$

$$\therefore r = \frac{(1 - 2^7)}{1 - 2}$$

تقريباً: لإيجاد مجموع n حداً من متسلسلة هندسية معلومة حدها الأول a وحدها الأخير l

$$\text{نعلم أن } r^n = \frac{l - a}{r - 1} \quad (1)$$

$$\text{وأن } l = ar^{n-1} \text{ وبضرب الطرفين في } r$$

$$\text{فنكون } l = ar^n \quad (2)$$

$$\text{وبالتعويض من (2) في (1) فإن: } r^n = \frac{l - a}{r - 1} \quad r \neq 1$$

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

مجموع عدد محدود من حدود متتالية هندسية

○ مجموع n حداً من حدود متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها r هو:

$$r^n = \frac{(r^n - 1)a}{r - 1} \quad \text{حيث } r \neq 1 \quad (\text{يستخدم إذا علم عدد الحدود})$$

○ مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وحدها الأخير l هو:

$$r^n = \frac{l - a}{r - 1} \quad \text{حيث } r \neq 1 \quad (\text{يستخدم إذا علم الحد الأخير})$$



ملاحظات هامة

- ١ يفضل استخدام الصورة $u = \frac{(1-v^{n+1})}{1-v}$ ، $u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$ إذا كان $v < 1$ وإذا كانت $v > 1$ نستخدم الصورة السابقة
- ٢ إذا كانت $r = 1$ فإن $u = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ (لن n حدًا) $\therefore u = n$ ، $u = 1$

مثال

أوجد مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول $u = 2$ وأساسها $r = 3$ وحدها الأخير 486

الحل

$$486 = u \cdot r^n = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$$

$$\therefore u = \frac{2-2 \times 486}{1-3} = 728$$

١٠٠ استخدام الرمز u للتجميع

يستخدم الرمز u لجمع حدود المتسلسلة بعد إيجادها بالتعويض عن قيم r لإيجاد الحد الأول والأساس وعدد الحدود أو الحد الأخير.

فمثلاً

الرمز $u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$ تعني مجموع حدود المتسلسلة من الحد الثاني إلى الحد السادس لذلك نعوض عن $r = 2$ لإيجاد قيمة u ونوجد r وعدد الحدود ثم نوجد المجموع وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة.

١٠١ المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

تعريف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية (اللانهاية) هي المتسلسلة التي لها عدد لا نهائي من الحدود

فمثلاً

المتسلسلة $2 + 4 + 8 + \dots + 486$ متسلسلة منتهية لأن لها حد أخير
أما المتتابعة $2 + 4 + 8 + \dots$ فهي متتابعة غير منتهية لأن ليس لها حد أخير

مثال ٢

أوجد مجموع الختصاصات الهندسية $1 + 2 + 4 + \dots + 65536$

الحل

$$\text{من } \frac{r - r^n}{r - 1} \quad (\text{بالتعويض من } 1 = r, 2 = r^2, 4 = r^4, \dots, 65536 = r^{16})$$

$$\frac{2 \times 65536 - 1}{2 - 1} = 131071 \quad \therefore 98304 = \frac{131071 - 1}{2 - 1}$$

مثال ٤

متتابة هندسية أساسها ٢ ومجموع حدودها الستة الأولى $= 63$ أوجد المتتابة

الحل

$$\frac{[1 - 2^6](2)}{1 - 2} = 63$$

$$2 = \frac{63}{63} = 1$$

$$\text{من } \frac{(1 - 2^6)(2)}{1 - 2} = 63$$

$$63 \times 2 = 126 = 2 - 2^6$$

المتتابة هي $(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$

مثال ٥

أوجد $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (2)^{n-1}$

الحل

$$A = 1 + 2 + 4 + \dots = 12 = 2^4 = 16, \quad 16 = 2^4 = 16, \quad 16 = 2^4 = 16$$

$$\text{من } \frac{(2^4 - 1)(2)}{2 - 1} = 15 \quad (\text{بالتعويض من } 16 = 2^4, 16 = 2^4, 16 = 2^4)$$

$$12750 = 250 \times 16 = A$$

$$\frac{(2^4 - 1)(2)}{2 - 1} = 15$$

مثال ٦

متتابعة هندسية موجبة مجموع الأربعة حدود الأولى منها $22\frac{1}{4}$ ومجموع الأربعة حدود التالية لها 360 فما هي المتتابعة

الحل

$$\therefore \text{هي } \frac{(1-u^4)r}{1-u}$$

$$\textcircled{1} - \frac{(1-u^4)r}{1-u} = 22\frac{1}{4} \therefore$$

$$\therefore \text{مجموع الثمانية حدود الأولى منها } 382\frac{1}{4} = 360 + 22\frac{1}{4}$$

$$\frac{(1-u^8)r}{1-u} = 382\frac{1}{4} \therefore$$

بقسمة (٢) على (١):

② ~

$$17 = \frac{(1-u^4)r(1+u^4)}{1-u^4} \therefore \frac{382\frac{1}{4}}{22\frac{1}{4}} = \frac{1-u}{1-u^4} \times \frac{(1-u^4)r}{1-u} \therefore$$

$$17 = 1 + u^4$$

$$16 = u^4 \therefore$$

$$4 \pm = u \therefore$$

$\therefore u = 4$ هي المتتابعة موجبة

بالتعويض في (١):

$$10 \times 1 = 22\frac{1}{4} \therefore$$

$$1\frac{1}{4} = 1 \therefore$$

\therefore المتتابعة هي $(1\frac{1}{4}, 6, 24, 96, \dots)$

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة، حدها الثاني 6 وحدها الثالث يزيد من حدها الأول بمقداره 9 أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها

الحل

$$\textcircled{1} - 6 = u \therefore$$

$$9 = 1 - u \therefore$$

② ~

$$9 = 1 - u \therefore$$

$$9 = 1 - u \therefore$$

$$9 = (1-u^2)r \therefore$$

بقسمة ② على ① :

$$\frac{9}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \cdot 9 = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad \text{مرفوض 4}$$

$$\frac{(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

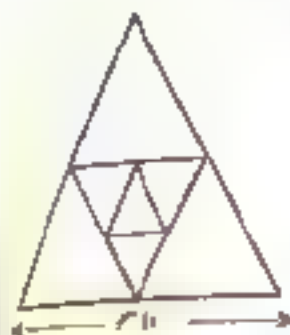
$$\frac{3}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$3 = 1$$

$$381 = \frac{(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

مثال ٨



يبين الشكل المقابل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ، رسم مثلث آخر في الداخل عن طريق توصيل النقاط التي تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عند جميع مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى في هذا النمط.

الحل

$$\text{محيط المثلث الأكبر} = 12 \times 3 = 36$$

$$\text{محيط المثلث الأصغر التالي} = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{محيط المثلث التالي للمثلث الأصغر} = 3 \times 3 = 9$$

أول النمط هو ١٢، ١٨، ٢٧، ٣٦، ٤٥، ٥٤، ٦٣، ٧٢، ٨١، ٩٠

$$\text{مجموع المحيطات} = 12 + 18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63 + 72 + 81 + 90$$

وهي مجموع متسلسلة هندسية

$$\frac{(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}-1} = 12$$

$$12 \times \frac{(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}-1} = 12 \times 12 = 144$$

$$\text{بالتعويض عن 12} = 12 \times 12 = 144$$

ملاحظة

محيط المثلث المتساوي الأضلاع
= 3 × طول الضلع

١٠٠ الهندسة الهندسية غير المتقاربة

المتسلسلات الهندسية غير المتقاربة نوعان:

النوع الأول يكون فيها $|r| < 1$ وهي متسلسلة لا يمكن إيجاد مجموعها

مثل: المتسلسلة $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$ وفي هذه الحالة تسمى متسلسلة غير متقاربة

النوع الثاني يكون فيها $|r| > 1$ وهي متسلسلة يمكن إيجاد مجموعها

مثل: المتتالية $(1, 2, 4, 8, \dots)$ وفي هذه الحالة تسمى متسلسلة متقاربة
أي أن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي التي لها عدد لا نهائي من الحدود وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًا فإنها تكون متقاربة لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي (ما أن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة).

١٠١ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

عندما $|r| < 1$ فإن من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة $\frac{1 - r^n}{1 - r}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن r^n يقترب من صفر عند ما تكون $|r| < 1$

ويصبح المجموع $\frac{1}{1 - r}$

مثال

إذا كانت $|r| < 1$ فإنه لا يمكن إيجاد مجموع المتتالية إلى ما لا نهاية

مثال

في المتتالية الهندسية $(1, 2, 4, 8, \dots)$ أوجد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من الحد الأول

الحل

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{1 - 2^n}{-1} = 2^n - 1$$

مثال ١١

متتابة هندسية لا نهائية مجموع حدودها ١٦ وأساسها $\frac{1}{4}$ أوجد المتتابة ثم أثبت أن حدها الثالث يساوي ٣ أمثال مجموع الحدود التالية له.

الحل

$$\frac{1}{r-1} = \infty \quad \therefore \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = 16 \quad \therefore r = 1$$

\therefore المتتابة هي $(\dots, \frac{3}{4}, 3, 12, \dots)$

$$\textcircled{1} \quad \left[\frac{3}{4}\right] = \frac{1}{16} \times 16 = \frac{1}{4} \times 16 = \frac{1}{r} \times 16 = 16 = 4 = 2^2$$

\therefore مجموع الحدود التالية له $= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots \rightarrow \infty$

$$\textcircled{2} \quad \left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{64} \times 16 \times \frac{4}{3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right) \times 16}{\frac{1}{4}-1} = \frac{4}{r-1} \quad \therefore$$

من $\textcircled{1}$ ، $\textcircled{2}$ نستنتج أن: $4 = 3$ أمثال مجموع الحدود التالية له.

مثال ١٢

متتابة هندسية غير منتهية مجموع عند غير محدود من حدودها ٩٦ وحدها الأول يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٢٤ أوجد المتتابة.

الحل

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{r-1} = 96 \quad \therefore \frac{1}{r-1} = \infty$$

$$\textcircled{2} \quad 24 = (r-1) \quad \therefore 24 = r - 1$$

من $\textcircled{1}$ ، $\textcircled{2}$ بالقسمة:

$$\frac{1}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r-1) \quad \therefore \frac{1}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r-1)$$



$$1 = 3 + \sqrt{8} - \sqrt{4} \therefore$$

$$1 = \sqrt{4} + \sqrt{8} - 4$$

$$1 = (3 - \sqrt{4})(1 - \sqrt{2})$$

$$\frac{3}{4} = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{4} = \sqrt{2} \quad (\text{مرفوضة لأن المتتابعة غير منتهية})$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \dots)$$

$$48 \div 1 = 48$$

مثال ١٢

إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية S ومجموع حديها الأول والثاني يساوي 3، برهن على أنه توجد متابعتان تحققان هذين الشرطين وأوجد هما

الحل

$$3 = a + ar \quad (1)$$

$$S = \frac{a}{1-r}$$

$$(2)$$

$$3 = (r+1)a \therefore$$

$$\frac{3}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r+1)a \therefore$$

بقسمة (2) على (1):

$$\frac{1}{4}a = r \therefore \quad \frac{1}{4}a = r \therefore$$

$$\frac{3}{4} = r - 1 \therefore$$

\therefore توجد متابعتان تحققان هذين الشرطين

$$1 > |r| \therefore$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots)$$

$$\frac{1}{4} = r$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \frac{27}{64}, \dots)$$

$$\frac{3}{4} = r$$

مثال ١٣

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع عدد غير منتهى من حدودها $= 16$ والنسبة بين حديها الرابع إلى حديها الثالث هي $\frac{1}{4}$ أوجد المتتابعة.

الحل

$$\frac{1}{4} = r \therefore$$

$$\frac{1}{4} = \frac{a_4}{a_3} \therefore$$

$$16 = \frac{a}{1-r} \therefore$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (16, 12, 9, 7, \dots)$$

$$a = 16$$

$$16 = \frac{a}{1-\frac{1}{4}} \therefore$$

تحويل الكسور العشرية الحاصلة من اقتطاع

عند تحويل بعض الكسور الاعتيادية بصورة عشرية نجد ان عمليات القسمة لا تنتهي ويوجد بعض الأرقام تتكرر باستمرار مثل $\frac{1}{3} = 0,3333333333333333 \rightarrow \infty$ ولذلك اصطلح على ان يكتب هذا الكسر على الصورة $0,3\overline{3}$ وتقرأ $0,3$ دائرياً 3 ولقد اصطلح على وضع شرطة فوق الرقم دائري وهذه الشرطة تعني تكرار العدد إلى ما لا نهاية أو على رقمين أو ثلاثة لتعني أن الأرقام التي أسفل لشرطة تتكرر بصورة مستمرة

مثال ١٤

ضع شكل من الأعداد الآتية في صورة عدد نصبي:

١ $0,3\overline{3}$

٢ $0,1\overline{45}$

٣ $0,4\overline{12}$

الحل

١ $0,3\overline{3} = 0,3333333333333333 \rightarrow \infty = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$ إلى ∞

$= \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) \frac{3}{10} =$

وما يداخل القوسين عبارة عن مجموع متتابعة هندسية لا نهاية حدها الأول ١ وأساسها $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{3} = \frac{10}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{\frac{10}{9}} \times \frac{3}{10} = 0,3\overline{3}$

٢ $0,1\overline{45} = 0,1454545454545454 \rightarrow \infty = \frac{145}{1000} + \frac{145}{10000} + \frac{145}{100000} + \dots$ إلى ∞

$= \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \dots \right) \frac{145}{1000} + \frac{1}{10} =$

$\frac{1}{\frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \dots} = \frac{145}{999} = \frac{145}{999} + \frac{1}{10} = \frac{100}{999} \times \frac{145}{1000} + \frac{1}{10}$

٣ $0,4\overline{12} = 0,4121212121212121 \rightarrow \infty = \frac{412}{1000} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{100000} + \dots$ إلى ∞

$= \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \dots \right) \frac{412}{1000} + \frac{4}{10} =$

$\frac{412}{999} = \frac{11}{9} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{\frac{11}{9}} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{10}$

$\frac{11}{9} = \frac{49}{9} \rightarrow \frac{11}{9} = 0,4\overline{12}$

تمرين

السؤال الثاني
الاجابة
الاجابة
الاجابة

أولاً راجع معنا واختر نفسك

إخبار تراكمي

المدة المتوقعة



١. اجب عن الأسئلة الآتية :

- ١) إذا كان الوسط الحسابي للمعددين ٢١، ٢١ هو ١٥ فإن $... = ...$
[٣٥ د ٩ د ٩٥ د ١٥]
- ٢) الوسط الهندسي للمعددين ١٨، ٨ هو $.....$
[٧٢ د ١٤٤ د ١٢٤ د ١٢]
- ٣) مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^n (3 - 2^k)$ يساوي $.....$
[٨٠ د ٩٠ د ٧٢ د ٤٠]
- ٤) عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٩٩، ١ وكل منها يقبل على ٥ هو $.....$
[٢١ د ٢٠ د ٣٨ د ١٩]

٥) أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{1}{3}$ ، ٣٢

.....

٦) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١، ...) ابتداء من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع.

.....

ثانياً مسائل المستوى الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

- ١ مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة (١٠٠، ٤٤، ٢١، ١٠، ...) هو
 [٣٢ د ٣٦ د ٦٤ د ١٢٣]
- ٢ مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة (١٠٠، ٣٤٩، ٢٧٧، ...) هو
 [٤١ د ٢٠٥ د ٤٠٥ د ٨١]
- ٣ متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٩٣ فإذا كان أساسها = ٣ فإن حدها الأول =
 [٢ د ٦ د ٢ د ١٢]
- ٤ متتابعة هندسية حدها الأول = ٤ ومجموع الثلاث حدود الأولى منها = ٢٨ فإن أساس المتتابعة هو
 [٢٠، ٣٠ د ٢٠، ٤٢ د ٣ د ٤]
- ٥ مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٠٠٠، ٤١٤، ٢٤٤، ...) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو
 [٤ د ٦ د ٨ د ١٠]
- ٦ مجموع المتتابعة الهندسية (٣٤٩، ٢٧٧، ...) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو
 [١٦٢ د ٢١ د ٤٠٥ د ٨١]
- ٧ مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٠٠٠، ٤١٤، ٢٤٤، ...) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو
 [٢٣ د ٦٤ د ٦٣ د ٦٤]
- ٨ مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ١٩ وحدها الأول = ٤ فإن:
 أولاً أساس المتتابعة =
 ثانياً مجموع الخمسة حدود الأولى منها =
 [٧٨١ د ٧٨١ د ٧٨١ د ٧٨١]

٣ أجب أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها ؟ فسر إجابتك.

- ١ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٢ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٣ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٤ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٥ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٦ $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$

٤٤ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى ∞ ثم أوجد المجموع إن أمكن.

- ① $(\dots, 66, 12, 24, 48, \dots)$ ② $(\dots, 12, 16, 20, 24, \dots)$
 ③ $(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$ ④ $(\dots, 5 \times 2^{n-1}, \dots)$

٤٥ أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي فيها:

- ① $6 = 0.63 = r, 64 = f$ [٣٨٦] ② $6 = 0.63 = r, 64 = f$ [٣٨٦]
 ③ $6 = 0.63 = r, 64 = f$ [٣٨٦] ④ $6 = 0.63 = r, 64 = f$ [٣٨٦]

٤٦ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

- ① $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$ (إلى ٦ حدود) [٣٧٨]
 ② $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$ (إلى ٦ حدود) [٣٧٨, ٣٧٩]
 ③ $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$ (إلى ٦ حدود) [٣٧٨]

٤٧ أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n-1}$ [٣٧٧, ٣٧٨] ② $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1}$ [٣٧٧, ٣٧٨]

٤٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ① مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي فيها $2 = r, 1 = f$ يساوي
 [٣٩ ٤ ٣٠ ٤ ٣١ ٤ ٣٢]
 ② مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة $(\dots, 2, 4, 8, 16, \dots)$ هو
 [٣٠ ٤ ٣٢ ٤ ٣٤ ٤ ٣٦]
 ③ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ هو ٤ فإن حدها الأول يساوي
 [٤ ٤ ٣ ٤ ٢ ٤ ١]
 ④ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوي
 [٣ ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ ٤]
 ⑤ متتابعة هندسية حدها الأول يساوي مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوي
 [٣ ٤ ٤ ٤ ٤ ٤ ٤]
 ⑥ متتابعة هندسية مجموع n حدها الأولى منها يعطى بالعلاقة $3 - 10n + n^2$ فإن الحد الثالث منها يساوي
 [٣٧ ٤ ٣٩ ٤ ٤١ ٤ ٤٣]

مسائل المتتابعة الثاني

التمرين ١: عثر على حد، و u_1 حد من متتابعة هندسية

أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 64)$

ثم أوجد عدد حدودها

[11/11/2020]

١٢) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوي ٩ وحدها السادس يساوي ٢٤٣

أوجد المتتابعة ومجموع الستة حدود الأولى منها

[11/11/2020]

١٣) إذا كان u_1 حدها الأول من المتتابعة الهندسية $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ابتداء من حدها

الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨٩

[11/11/2020]

١٤) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = ٢٤٣ وحدها الأخير = ٩

ومجموع حدودها = ٣٩٤

[11/11/2020]

١٥) أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموعها = ١٠٩٣ وحدها الأخير = ٧٢٩ وأساسها = ٣

[11/11/2020]

١٦) متتابعة هندسية حدها الرابع = ٢٤ وحدها السابع = ١٩٢ أوجد المتتابعة ثم

أوجد مجموع الخمسة عشر حدها الأولى منها

[11/11/2020]

١٧) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها $u_1 = ١$ ، $u_2 = ٢$ ، $u_3 = ٤$ أوجد

هذه المتتابعة ومجموع الـ ١٥ حدها الأولى منها

[11/11/2020]

١٨) متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الرابع يساوي أربعة أمثال حدها السابع

ومجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوي ٩٣ أوجد المتتابعة

[11/11/2020]

١٩) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود لأربعة الأولى منها يساوي ١٥

وحدها السادس يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٩ أوجد هذه المتتابعة

[11/11/2020]

٢٠) متتابعة هندسية فيها $u_1 = ١$ ، $u_2 = ٢$ ، $u_3 = ٤$ أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها

[11/11/2020]

٢١) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$ ابتداء من حدها الرابع إلى

حدها العاشر

[11/11/2020]

[4=6]

(16(17177424)]

(16) (1977-78)]

$$\left[\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]$$

157

193

450

$(\{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}\})$

【参考文献】

أسئلة على عدد غير متناه من حدود متناهية هندسية

41

$$\left[\left(-1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 \right) \right]$$

٣٠ [١٢] **أ**وحد المتناحية الهندسية التي مجموع عدد غير منته من حدودها يساوي ٨

[L. 4. 4. 4. 4.]

٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع حدها الأول والثاني = ١٦ ومجموع حدودها منته من حدودها = ٢٥

٢٢ متتابعة فيها $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 1 + u_2$ أثبت أن المتتابعة هندسية ويمكن جمعها إلى لا نهاية وأوجد هذا المجموع

٢٣ متتابعة هندسية حدها الثالث = ٣ وحدها الثامن = $\frac{1}{81}$ أوجد المتتابعة ثم بين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع

٢٤ متتابعة هندسية غير منتهية حدودها موجبة يزيد حدها الأول عن حدها الثاني بمقدار ١ ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوي $\frac{135}{4}$ أوجد هذه المتتابعة

٢٥ (u_n) متتابعة هندسية فيها $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$ أثبت أنه توجد متباينتان وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود أحدهما وأوجد هذا المجموع بدءاً من حدها الأول.

٢٦ (u_n) متتابعة هندسية فيها $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$ أوجد المتتابعة ومجموع حدودها إلى ما لا نهاية.

٢٧ (u_n) متتابعة هندسية فيها $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها وأوجد هذا المجموع

٢٨ متتابعة هندسية لا نهائية مجموع الحدين الأول والرابع منها = ٣٨ ومجموع الحدين الثاني والثالث = ١٢ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول

٢٩ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع عدد غير محدود من حدودها ابتداء من حدها الثاني = ١٢ وحدها الثاني يزيد عن حدها الثالث بمقدار ١ أوجد المتتابعة.

٣٠ مجموع حدود متتابعة هندسية (ل) ما لا نهاية يساوي أربعة أمثال لحدها الأول والثاني فإذا كان $u_1 = 1$ أوجد المتتابعة.

٤٥ بدأ شخص العمل في مصنع بمرتب سنوي قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٩٪ من مرتب السنة السابقة أحسب مرتبه في السنة السابعة ومجموع ما يحصل عليه في السنوات السبع الأولى.

٥١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) $1 + 4 + 9 + \dots + 128 = \dots$ [١٢٧ ك ٢٥٤ ك ١٤٠٨ ك $\frac{256}{3}$]

٢) $\frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$ إلى ٦ حدود = \dots

[$\frac{23}{16}$ ك $\frac{364}{81}$ ك $\frac{129}{81}$ ك $\frac{81}{121}$]

٣) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \dots$ [$\frac{765}{2}$ ك ٣٨١ ك ٥٦٧ ك ٧٦٥]

٤) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \dots$ [٦٣٥١ ك ٦٠٣٠ ك ٣٠٩٠ ك ١٥٣٦]

٥) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 20 = \dots$ [٤٠ ك ٨٠ ك ١٠٠ ك ٤٠٠]

٦) مجموع المتتابة اللانهائية $(1, 2, 4, 8, \dots)$ يساوى \dots

[٧٨ ك ٦٤ ك ٤٨ ك ٢٤]

٧) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابة هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ هو $13\frac{1}{3}$ فإن حدها الأول يساوى \dots

[١٦ ك ٨ ك ٩ ك ١٢]

٨) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابة الهندسية التي حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى \dots

[$\frac{1}{4}$ ك $\frac{1}{2}$ ك $\frac{7}{8}$ ك $\frac{3}{4}$]

٩) متتابة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ∞ فإن أساس هذه المتتابة = \dots

[$\frac{1}{4}$ ك $\frac{1}{3}$ ك $\frac{1}{2}$ ك $\frac{1}{6}$]

١٠) مجموع متتابة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١، u ، $2 = u$ ، $1 + u$ يساوى \dots

[$\frac{3}{4}$ ك $\frac{2}{3}$ ك ٢ ك ٣]

١١) (u) متتابة هندسية فيها $\frac{1}{27} = \frac{1}{u}$ ، $u = 5$ فإن مجموع عدد غير منته يساوى \dots

[١٥ ك $\frac{10}{3}$ ك ٤٥ ك $\frac{60}{3}$]

٥٤) إذا كانت (x_n) متتابعة هندسية بين أن المتتابعة (x'_n) حيث $x'_n = \log x_n$ تكون متتابعة حسابية وإذا كان $x_n = 2 \times 5^n$ فأوجد مجموع حدود كل من المتابعتين (x_n) ، (x'_n) إلى ٢٥ حدًا.

٥٥) متتابعة هندسية أساسها r ومجموع ١٨ حدًا الأولى منها يريد يستداز ٢٩ من مجموع ١٢ حدًا الأولى منها أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها بدلالة r .

٥٥) متتابعة هندسية فيها $x_1 = ٢$ ، $x_2 = ٤$ ، $x_3 = ٨$ ، $x_4 = ١٦$ أوجد قيمة x_n .

٥٦) أوجد مجموع عدد لا نهائين من حدود المتتابعة الهندسية:

$$\left[\left(\frac{3}{11} \right), \left(\frac{3}{11} \right)^2, \left(\frac{3}{11} \right)^3, \dots \right]$$

٥٧) متتابعة هندسية حدها الأول ١ وأساسها r وعدد حدودها n ، إذا كان مجموع حدود

$$\text{هذه المتتابعة هو } \frac{r^n - 1}{r - 1} \text{ فثبت أن مجموع مقلوبات هذه الحدود هو } \frac{r^n - 1}{r^n - 1}$$

٥٨) إذا كان x_n هو مجموع n حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots)$

حيث x_n مجموع n حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots)$ حيث n عدد

زوجي أثبت أن $x_n = \frac{1}{4}$ هي ثم أوجد النسبة بين x_n ، x_{n+1} .



مبدأ العد

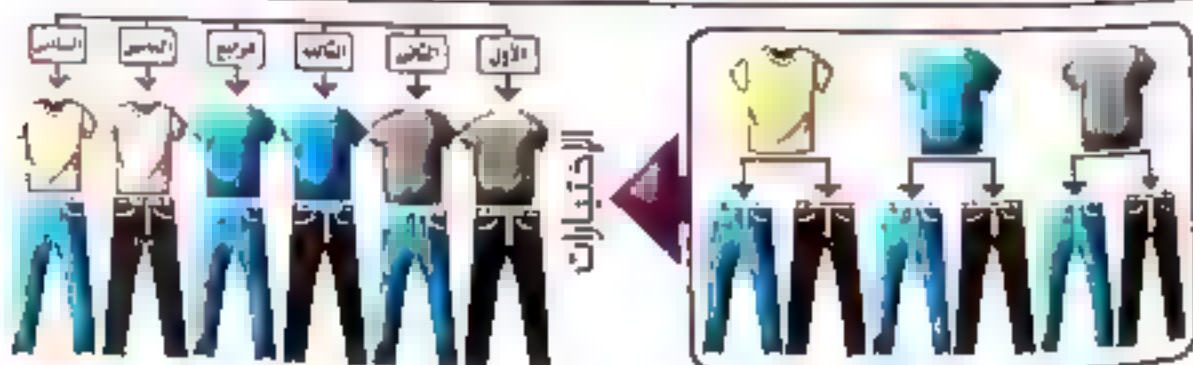
الاحتمال

١

٥ مبدأ العد الأساسي

تمهيد كثيراً ما نحتاج إلى معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن ترتديها مجموعة من الثياب المختلفة لإرتدائها لذلك فدراسة مبدأ العد يفيدنا في معرفة عدد الطرق،
فمثلاً إذا كان لدى شخص ٣ تي شيرت أنوانهم هي [رمادي، أسود، أحمر]،
٢ بطلون أنوانهم هي [أسود، أبيض] فبكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص في زى مكون من تي شيرت وبطلون.

بالفكر قليلاً نجد أن كل تي شيرت يمكن ارتدائه مع بطلون من البطلون ويمكن توضيحه بالمخطط التالي ويسمى بمخطط الشجرة البالية.



أي أن عدد طرق إختيار ٦ طرق مختلفة ويمكن معرفة ذلك أيضا بصورة سهلة وبسيطة كما يلي :

عدد طرق إختيار ٣ شبرت = ٣ طرق ، عدد طرق إختيار منطلون = ٢ طريقة .
عدد طرق الإختيار = $3 \times 2 = 6$ طرق .

وهي ذلك يمكن إستنتاج القاعدة التالية :

مبدأ تعدد الخيارات

إذا يمكن إجراء عملية بطرق مختلفة عددها m وكان لدينا في نفس الوقت عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق مختلفة عددها n فإن عدد طرق إجراء العمليتين معا $= m \times n$

ويمكن تعميم القاعدة كما يلي :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوي m طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثان n طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث p طريقة وهكذا إلى عدد طرق عمل r هو m طريقة فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا $= m \times p \times \dots \times r$

مبدأ الترتيب في الشروط

مبدأ العد الشرطي هو نفس مبدأ العد وتكنيتا نبدأ أولا بالخانة المشروطة نعرف عدد الطرق التي تحقق هذا الشرط ثم الخانة التالية التي بها شرط ونعرف عدد الطرق التي تحققها هي أيضا وهكذا .

مثالاً

إذا كان لدينا الأرقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ونريد تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة فكم طريقة يمكن ذلك ؟

الخانة	الأحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٥

ولنرد على هذا السؤال فإسنا نبدأ بالخانة المشروطة أولا وهي الخانة اليسرى خانة

المئات لأنه لا يمكن استخدام الصفر جهة اليسار وإلا أصبح العدد مكون من رقمين فقط لذلك فإنه يمكن وضع ٥ أرقام فقط في هذه الخانة .
عدد طرق إختيار الرقم في خانة المئات = ٥

وبعد إختيار قيمة في خانة المئات يتبقى ٥ أرقام فقط نختار من بينهم لخانة العشرات .
عدد طرق إختيار الرقم في خانة العشرات = ٥ وبعد إختيار رقم في خانة المئات والرقم في خانة العشرات يتبقى ٣ أعداد فقط نختار من بينهم لخانة الأحاد



١. عدد طرق اختيار الرقم على خانة الأحاد = ٣

٢. عدد الطرق الكلية = $3 \times 4 \times 4 = 48$ طريقة

مثال

مول تحارى له ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من المول بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أى باب دخل منه ؟

الحل

عدد طرق الدخول إلى المول = ٣ طرق ،

عدد طرق لخروج من المول = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الاختيار = $2 \times 3 = 6$ طرق



الدخول	الخروج	الاختيار
أ	ب	بأ
أ	ج	جأ
ب	أ	أب
ب	ج	بج
ج	أ	أج
ج	ب	بج

مثال

كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الأحاد من العناصر {٢، ٤، ٦}

ورقم العشرات من لعناصر {٣، ٥} ورقم المئات من العناصر {١، ٤، ٧}

الحل

خانة المئات	خانة العشرات	خانة الأحاد
١	٣	٢
٤	٣	٢
٧	٣	٢
١	٥	٢
٤	٥	٢
٧	٥	٢
١	٣	٤
٤	٣	٤
٧	٣	٤
١	٥	٤
٤	٥	٤
٧	٥	٤



من الشجرة البيانية،

عدد طرق الاختيار = عدد طرق رقم الاحد \times عدد طرق رقم العشرات \times عدد طرق رقم المئات
 $= 2 \times 2 \times 3 = 12$ طريقة

مثال ٣

ثلاثة أشخاص وصلوا إلى محافظة الأقصر فيها أربعة فنادق فما عدد الطرق التي
 بها يمكن نزول كل شخص في أحد هذه الفنادق وحده.

الحل

الشخص الأول يستطيع أن يختار أحد أربعة فنادق

\therefore عدد طرق اختيار الشخص الأول = ٤ طرق

وعندما يختار فندقًا معينًا فإن الشخص الثاني لا يجد أمامه سوى أن يختار فندقًا من
 بين الثلاثة الباقية

\therefore عدد طرق اختيار الشخص الثاني = ٣ طرق

وبالتالي عدد طرق اختيار الشخص الثالث = ٢ طريقة

\therefore عدد الطرق المختلفة = $4 \times 3 \times 2 = 24$ طريقة

مثال ٤

دخل يوسف مطعم لتقديم الوجبات الجاهزة فكان المطعم يقدم ٥ أنواع من الوجبات
 الساخنة و ٣ أنواع من السلطات و ٤ أنواع من المشروبات **كم** عدد الوجبات التي يمكن
 أن يقدمها يوميًا هذا المطعم على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من الوجبات الساخنة
 والسلطات والمشروبات؟

الحل

عدد طرق الاختيار = $5 \times 3 \times 4 = 60$ طريقة



مثال

نسيت رحاب الرقم الخاص بها لدخول الإنترنت وكان لديها المعلومات التالية :

١) يكون العدد من الأرقام ٦٤٥٤٤٣٤٢

٢) العدد مكون من خمسة أرقام .

٣) العدد زوجي .

فما هي عدد الخيارات الممكنة أمام رحاب لاستعادة رقمها ؟ إذا علم أن الأرقام لا تتكرر

الحل

(لاحظ أن الأرقام محدودة ولا تتكرر) عدد خانات العدد خمسة :

الخانة الأولى	الخانة الثانية	الخانة الثالثة	الخانة الرابعة	الخانة الخامسة
٢	٤	٣	٢	١
↓	↓			
عدد الزوجة {٢,٤,٦,٨}	سواء أن تم اختيار رقم من ٥ أرقام	وهكذا ...		

نبدأ بخانة الأحاد المشروطة (العدد زوجي ٦٤٤٤٢)

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الأولى = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الثانية = ٤ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الثالثة = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الرابعة = ٢ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الخامسة = ١ طرق

عدد الطرق (الإختيارات) = $٣ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢$ طريقة

مثال ٦

كم عددًا من خمس خانوات تبدأ بعدد فردي يمكن تكوينها من الأرقام
٦٤٥٤٤٣٠٢٤١ دون تكرار

الحل

تبدأ بخانة الأحاد المشروطة (٥، ٣، ١) لأن العدد فردي
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الأحاد (الأولى) = ٣ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات (الثانية) = ٥ طرق
وهي باقي الأرقام بعد الاختيار الأول (٥ أرقام)
عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٤ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآلاف = ٣ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات - ٢ طرق
∴ عدد الطرق = $3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 360$ طريقة

مثال ٧

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٧، ٤، ٤، ٣، ١، ٢} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا.

الحل

تبدأ بالخانة المشروطة وهي خانة العشرات
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات زوجيًا {٤، ٢} = ٢ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآحاد = ٣ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٢ طرق
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الألوف = ١ طرق
∴ عدد طرق الاختيار = $1 \times 2 \times 3 \times 2 = 12$ طريقة

تمرين

التمرين رقم ١

التمرين رقم ١
التمرين رقم ١
التمرين رقم ١

أولاً اجمع معاً وأختم نفسك

اختار تراكمي

الدرجة النهائية

التمرين رقم ١



١) أجب عن الأسئلة الآتية :

١) عدادا وسطهما الهندسي = ٥ فإن حاصل ضربهما =

[٦ ٤ ٢٥ ٥ ٧]

٢) الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية (٢، ٤، ٦، ٨، ...) هو $E_n = \dots$

[٢٢ ٥ ٣ + ٥ ٤ ٢٥]

٣) متتابعة حسابية فيها $E_n = E_{n-1} + ٣$ فإن أساس المتتابعة يساوي

[٣ - ١ ٤ ١ - ٣]

٤) إذا كان الوسط الهندسي لعددتين ٤٩ من هو ١٥ فإن من =

[٦ ٢١ ٢٥ ٢٥ -]

٥) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية $(E_n) = (٣ - ٤)^n$
(ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر.)

٦) أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع عدد غير منته من حدودها يساوي ١٨ ، حدها الثاني يساوي ١٢

ثالثاً مسائل المستوى الأول

٢ جامعة لها ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة الدخول والخروج من الجامعة بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أي باب دخل منه ؟

٣ كم عدد الإختيارات التي يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروباً واحداً من مشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو) ؟

٤ مطعم يقدم ٩ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلطات ، ٣ أنواع من الشربات كم عدد الوجبات التي يمكن أن يقدمها يوميًا على أن تشمل الوجبة نوعاً واحداً من كل من الفطائر والسلطات والمشروبات.

٥ كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الأحاد من العناصر {٢٤١} ورقم العشرات من العناصر {٤٤٣} ورقم المئات من العناصر {٧٤٦٤٥} ؟

ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ عدد طرق جلوس ٣ أشخاص على ثلاثة مقاعد في صف =

[١ ٤ ٦ ٤ ٣ ٤ ١]

٢ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {٥٤٤٣٤٧٦١} إذا سمح بالتكرار

يساوي

[٣٥ ٤ ٢٥ ٤ ١٥ ٤ ٣٥]

٣ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {٥٤٤٣٤٧٦١} بدون تكرار

يساوي

[٣٥ ٤ ٢٥ ٤ ١٥ ٤ ٣٥]

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي

[١ ٤ ٤+٤ ٤ ٤×٤ ٤ ١×٢×٣×٤]

٢ عدد طرق نزول ٣ أشخاص في أربعة فنادق حيث ينزل كل شخص في أحد هذه الفنادق

وعدم يساوي

[٣×٤ ٤ ٢×٤ ٤ ١×٢×٣ ٤ ٢×٣×٤]

٣) عند الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٢, ٤, ٥, ٦, ٧} يساوي
 [٢×٢] [٢×٤] [٢×٥] [٢×٦] [٢×٧]

٤) عدد الأعداد المكونة من أربعة حالات مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢, ٤, ٥, ٦, ٧} تساوي

٥) عدد الأعداد المكونة من أربعة حالات مختلفة تبدأ بكل منها بالرقم ٢ مأخوذة من الأرقام {٢, ٤, ٥, ٦, ٧} تساوي

٦) عند الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢, ٤, ٥, ٦, ٧} تساوي

[٢×٢×٢] [٢×٢×٤] [٢×٢×٥] [٢×٢×٦]

٨) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢, ٣, ٤, ٥} [١٧]

٩) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢, ٣, ٤, ٥, ٦} [١٤]

١٠) كم عددًا من أربع حالات يمكن تكوينه من الأعداد ٢, ٣, ٤, ٥ دون تكرار الرقم ؟ [٣٠]

١١) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧} بحيث يكون رقم الأحاد ؟ [١]

١٢) كم عددًا من خمس حالات تبدأ بعدد فردي يمكن تكوينها من الأرقام ٢, ٣, ٤, ٥, ٦ دون تكرار. [٣١]

١٣) كم عددًا من خمس أرقام تبدأ بالرقم ١ وتنتهي بالرقم ٥ من الأرقام {٢, ٣, ٤, ٥, ٦} دون تكرار. [١]

١٤) بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من ثلاثة أحرف من كلمة شجرة ؟ [٢٤]

١٥) بكم طريقة يمكن أخذ صورة تذكارية لعائلة مكونة من أب وأم وثلاثة أطفال يقفون معًا في صف واحد ؟ [٧٠]

١٦) كم طريقة لطفل لديه ٥ مجسمات هي مكعبة ، مخروط ، مكعب ، أسطوانة ، قوس لترتيب هذه المجسمات في صف واحد.

[٢٠]

١٧) تبدأ لوحات ترخيص السيارات في إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص .

[١٩٠٠٠]

١٨) بطاقة الصرف الآلي (فيزا كارت) تحتوي على أربعة أرقام من الأرقام ٠ إلى ٩ كم بطاقة مختلفة يمكن إنتاجها ؟

[١٠٠]

١٩) كم طريقة يمكن أن يختار طائب مقرين دراسيين الأول في الهندسة والثاني في الجبر إذا كان مطروحاً له ٩ مقررات في الهندسة ، ٣ مقررات في الجبر ؟

[١٨]

٢٠) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٩ ٨ ٥ ٤ ٣ } بحيث تكون أصغر من ٩٠٠ ؟

[١٨]

٢١) إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول في إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم فإننا نعلم الرقم (٢٥) ثابت من اليسار أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تحملها شبكات المحمول ؟

[١٠٠٠]

أرقام مسائل تقيس مستهبات عليا في التفكير

٢٢) كم عددًا يمكن تكوينه من أربعة أرقام مختلفة وتحتوي على الرقمين ٨٤٠ ؟

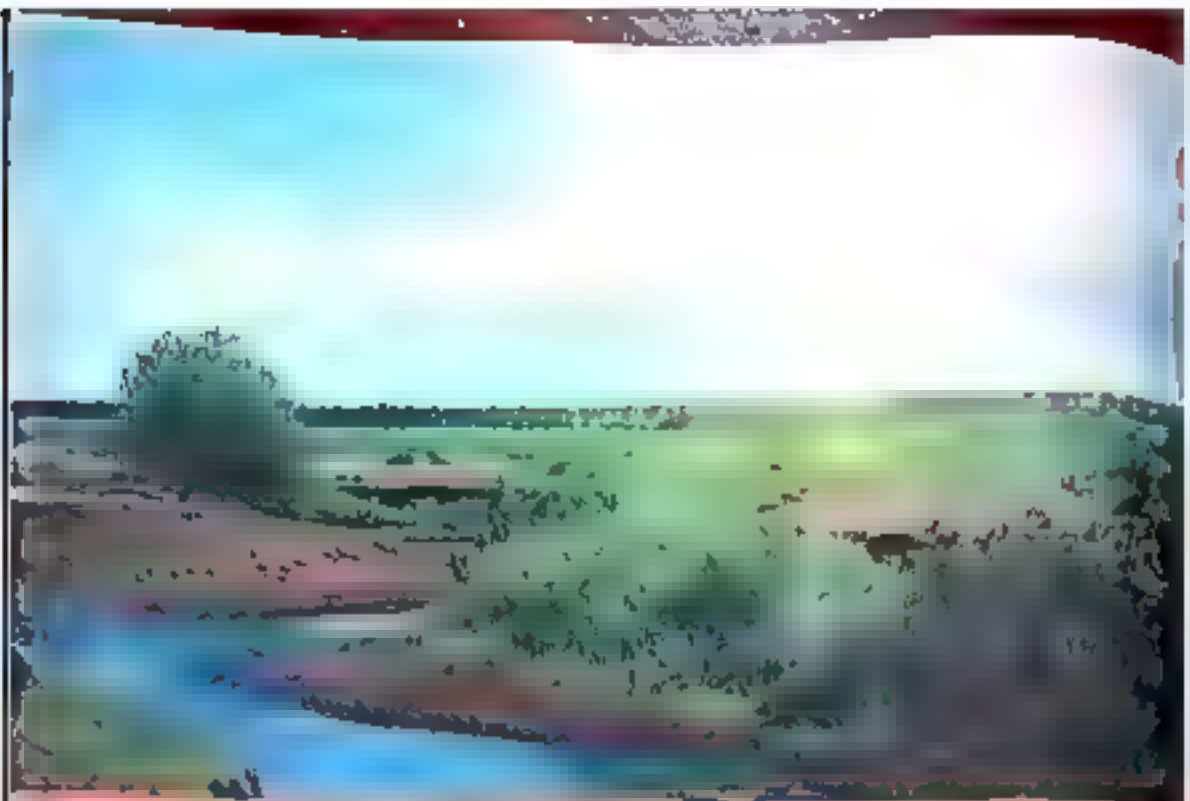
[١٨]

٢٣) كم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مختلفة من الأرقام { ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ } بحيث لا يتجاوز عددين زوجيين ولا عددين فرديين ؟

[١٧]

٢٤) كم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ وتكون محصورة بين ١٠٠ و ٧٠٠٠ ولا يكون مربعاً ؟

[٣٩٩]



مضروب العدد - التاديل

الجزء

٢

مضروب العدد

إذا ضربنا عدد صحيح في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه فإن هذه العملية تسمى «مضروب العدد»

فمثلاً

إذا ضربنا العدد ٤ في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه كالتالي :

$1 \times 2 \times 3 \times 4$ فإن هذه العملية تسمى مضروب ٤ وتكتب $4!$

وبالتالي فإن $3 = 1 \times 2 \times 3$ ، $5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ ، $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

يستخدم الآلة الحاسبة تكتب $2!$ كالتالي $[3] [Shift] [x^1] [=]$

ومن ذلك يمكن تعريف المضروب كما يلي :

المضروب

مضروب العدد الصحيح الموجب n يكتب على الصورة $n!$ ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة لـ n الأصغر من أو تساوي n حيث :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{حيث } n \geq 0$$

ملاحظات هامة

١ عندما $n = 1$ فإن $1 = 1$ ، عندما $n = 2$ فإن $1 = 1$ ومن ذلك فإنه إذا كان $n = 1$ فإن $n = 1$ أو $n = 1$

٢ أكبر عوامل n هو 1 وأصغرهم هو الواحد.

٣ $n = 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

$$n = 1 \quad (1 - n) \quad n = 2 - n \quad (2 - n) \quad (1 - n) \quad n = 3 - n$$

أي أنه يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه.

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$720 = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 =$$

$$720 = (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times 5 \times 6 =$$

٤ مضروب أي عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أي عدد صحيح موجب أقل منه.

$$\text{فمثلاً } 720 = \frac{720}{6} = 120, \quad 120 = \frac{120}{5} = 24$$

مثال

$$\frac{9}{7} + \frac{7}{5} \quad ٣$$

$$\frac{1001}{999} \quad ٢$$

$$\frac{15}{13} \quad ١ \text{ أوجد قيمة } ١$$

الحل

$$١ \quad \frac{15}{13} = \frac{13 \times 1 + 2}{13} = \frac{15}{13}$$

$$٢ \quad \frac{1001}{999} = \frac{999 + 2}{999} = \frac{1001}{999}$$

$$٣ \quad 118 = 72 + 46 = \frac{72 \times 9}{7} + \frac{46 \times 7}{5} = \frac{9}{7} + \frac{7}{5}$$

مثال ٢

إذا كان: $\frac{1}{u} = 21$ فما قيمة u ؟

الحل

$$\frac{1}{u} = 21 \Rightarrow 1 \times 1 \times 3 \times 7 = 21$$

$$\therefore \frac{1}{u} = 21$$

$$u = \frac{1}{21}$$

المعرفة العدد الذي مضروب
21 نقسم على 1 ثم على
2 ثم على 3 وهكذا إلى أن
نصل إلى ناتج القسمة = 1

1	21
2	21
3	14
4	4

مثال ٣

إذا كان: $\frac{1}{u} + \frac{2}{u} - \frac{1}{u} = 2$ أوجد قيمة u

الحل

$$\frac{1}{u} = \frac{2+u}{u}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{u(1+u)(2+u)}{u}$$

$$1 = 2 - 2 + u + 2 + u$$

$$1 = (2 - u)(2 + u)$$

$$u = 1$$

$$2 = (1+u)(2+u)$$

$$1 = 2 - u + 2 + u$$

$$u = 1 \text{ (مرفوض)}$$

مثال ٤

إذا كان: $\frac{1}{u} = \frac{1}{2-u} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{u}$ فما أوجد قيمة u

الحل

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2-u} + \frac{1}{(2-u)(1-u)} + \frac{1}{(2-u)(1-u)u}$$

$$\frac{1}{u} = \left(1 + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)u}\right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{1}{u} = \left(\frac{(1-u)u + u + 1}{(1-u)u}\right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{26}{u} = \left(\frac{u - 2u + u + 1}{(1-u)u} \right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{26}{u} = \left(\frac{1+2u}{(1-u)u} \right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{26}{u} = \frac{1+2u}{(2-u)(1-u)u}$$

$$\frac{26}{u} = \frac{1+2u}{u}$$

$$26 = 1 + 2u$$

(لأن $u \neq 0$)

$$25 = 2u$$

$$u = \frac{25}{2}$$

مثال

أوجد قيمة u

إذا كان: $\frac{u}{4-u} = \frac{5-u}{4}$

الحل

$$u = 4 - u$$

$$u = 2$$

$$5u = (5-u)(4-u)$$

$$u = 1 - u$$

النتيجة

إذا كان لدى أحد محلات الأزياء 6 ألوان لتعديل معين من القمصان وأراد ثلاثة أشخاص اختيار ثلاثة منها بألوان مختلفة.

فيكم طريقة يمكن اختيار هذه الألوان الثلاثة معًا ؟

بالطبع فإن الشخص الأول يمكنه اختيار أي لون من الستة ألوان أي أن له 6 طرق للاختيار

أما الشخص الثاني فيختار بعد لون من الخمسة ألوان الباقية أي أن له 5 طرق للاختيار

أما الشخص الثالث فيختار بعدهما لون من الأربعة ألوان الباقية أي أن له 4 طرق للاختيار

فيكون عدد طرق اختيار الألوان الثلاثة معًا $6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

وكل ثلاثة ألوان تم اختيارهم معًا يسمى تبديلاً لستة ألوان مأخوذة ثلاثة في

كل مرة ويرمز لذلك بالرمز C_3^6 ونقرأ «ستة لام ثلاثة».

أولاً $3! = 1 \times 2 \times 3$ تكتب بالآلة الحاسبة كما لاتي :

$$[3] [X] [2] [=] \quad [6] [X] [3] [=]$$

أولاً $3!$ تعني حاصل ضرب عدة عوامل عددها 3 تبدأ بالعدد 3 وحكل عامل ينقص واحد عن سابقه.

كذلك $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ عند العوامل 4 ويبدأ بالعدد 4 والعدد الذي قبله 3

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ نصرب العدد 5 بالعدد الذي قبله وهكذا إلى 1 عوامل مما سبق نستنتج أن كل طريقة من طرق الاختيار تسمى تبديلة وتعرف كما يلي :

التبديلة

التبديلة لعدد من الأشياء هي وضعها في ترتيب معين.

ويمكن صياغتها رياضياً بالتعرف التالي :

تعريف

يرمز لعدد تبديل n من العناصر الصغيرة مأخوذة من r العناصر في كل مرة بالرمز

$${}^n P_r \text{ حيث } {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (1 \leq r \leq n)$$

حيث $n \geq 0, r \geq 0, n \geq r$

أولاً الرمز ${}^n P_r$ ويقراء n لـ r يدل على عدد تبديل r من الأشياء المختلفة

مأخوذة منها r من الأشياء في كل مرة حيث $r \leq n$

أولاً ${}^n P_r =$ عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من n من الأشياء

بحيث يحتوى كل ترتيب على r من هذه الأشياء

فمثلاً ${}^5 P_3 =$ عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من 5 أشياء بحيث يحتوى كل

ترتيب على 3 من هذه الأشياء في كل مرة

أولاً ${}^5 P_3 = 5 \times 4 \times 3$ (لاحظ أن العدد الأخير $= 3 = (5 - 3 + 1)$)

${}^5 P_1 =$ عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من 5 أشياء بحيث يحتوى كل

ترتيب على 1 من هذه الأشياء في كل مرة.

أو أن $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (لاحظ أن العدد الأخير $= (1+2-1) = 2$)
أو أن العامل الأخير في حاصل الضرب هو $(1+2-1) = 2$

أي يزيد واحد عن الفرق بين 2 و 1

لاحظ أن $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ وإذا ضربنا البسط والمقام في $1 \times 2 \times 3$

فإن $24 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3}$ وحيث أن $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$$\frac{24}{1 \times 2 \times 3} = 4 \quad \text{فإن: } 4 = \frac{24}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\text{أو بصورة أخرى: } 4 = \frac{24}{3-1}$$

$$\text{وبنفس الطريقة فإن: } 5 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{24}{2} = 12$$

فما سبق نستنتج أن: $\frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$ حيث $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{N}$

لاحظ أن n له صورتان فإذا كانت n معلومة يفضل استخدام الصورة:

$$n = (1-1)(2-1) \dots (n-1)$$

$$\text{فمثلاً } n = (1-1)(2-1) \dots (n-1)$$

أما إذا كانت n مجهولة فيفضل استخدام الصورة: $\frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$

$$1 = \frac{n}{n} = \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$\text{فمثلاً } 1 = \frac{n}{n-1}$$

$$\text{أو أن } 1 = \frac{n}{n-1}$$

$$\frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

$$\text{ملاحظات: } 1. \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

ويمشي تلخيص قوائم التباديل فيما يلي:

ملخص قوانين التباديل

- ١ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ويستخدم إذا كانت n معلومة حيث $n \geq 1$
- ٢ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ عدد العوامل والحد الأخير $= 1$
- ٣ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ويستخدم غالباً لاختصار المضروب.
- ٤ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ويستخدم إذا كانت n مجهولة غالباً
- ٥ $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$

ملاحظات هامة

- ١ يمكن أن تستعمل في المسائل اللفظية عن التباديل من خلال الجمل التالية:
- ٢ إختيار لخدمة للقيام بأعمال مختلفة (التسديد وظيفة رئيس ونائب)
- ٣ الإختيار على التتالي (واحد وراء آخر)
- ٤ غير مسجوع بالتكرار (التباديل الترتيب فيها هام)
- ٥ المسحب بدون إرجاع (بدون إحتلال)
- ٦ توزيع عناصر على أماكن بحيث يشغل كل عنصر مكان واحد في نفس الوقت.

مثال

أوجد قيمة $10! - 9! - 8!$

الحل

- ١ $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$
- ٢ $9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$
- ٣ $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$

استخدام الحاسبة

يرمز للتبادل بالحاسبة العملية بالرمز nPr ونستخدم فيها المفاتيح $\boxed{\text{Shift}}$ $\boxed{\times}$ ونحسب قيمة nPr بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح الآتية:

$$\boxed{9} \boxed{\text{Shift}} \boxed{\times} \boxed{4} \boxed{=} \boxed{3024}$$

مثال ٢

فاوجد: $4 - 5$

إذا كان ${}^6P_r = 720$

الحل

٥	٧٢٠
٤	٧٢٠
٣	٧٢
٢	٦
١	٦
١	١

نبدأ بقسمة العدد ٧٢٠ على ٦ ثم نقسم العدد الناتج على ٥

ثم نقسم العدد الناتج على ٤ ثم نقسم العدد الناتج على ٣

ثم نقسم العدد الناتج على ٢ حتى نصل إلى العدد ١

$$\therefore \text{العدد } 720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 5 - 4$$

$$\therefore {}^6P_r = {}^6P_6$$

$$\therefore 1 - 5 = 4 - 5 = 1$$

مثال ٣

إذا كان ${}^6P_r = 720$ ، فأوجد 6P_5

الحل

٥	٧٢٠
٤	٧٢
٣	٦
١	١

من المفترض وجود ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهم ٧٢٠

حيث أن العدد رقم أحاده «صفر» فلنأخذ القسمة

بالرقم ٥ ثم نحاول العدد التالي له ٦ وهكذا ويمكن

تقسيمه بأي صورة لإيجاد ٣ أعداد متتالية حاصل

ضربهم يساوي ٧٢٠

$$\therefore {}^6P_5 = 6 \times 5 \times 4$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 720 \\ 9 & 72 \\ 8 & 8 \\ & 1 \end{array}$$

$$7 = 2 \therefore$$

$$10 = u + 2 \therefore$$

$$2 = u \therefore$$

$$3^7 = 3^{u+2}$$

$$8 \times 9 \times 10 = 3^{u+2}$$

$$3^{10} = 3^{u+2} \therefore$$

$$10 = u + 2$$

مثال

إذا كان: $36 = 3^u + 3^v + 3^w$ فأوجد قيمة: $1-u$; $1+u$

الحل

$$36 = (1-u)u + u + 1 \therefore$$

$$0 = 25 - 2u \therefore$$

$$0 = u \therefore$$

$$30 = \frac{10 \times 1}{1} = 10 \quad 1 = 1-u \therefore 1+u$$

$$36 = 3^u + 3^u + 3^u$$

$$0 = 36 - u - 2u + u + 1$$

$$10 = 2u \therefore$$

مثال

إذا كان: $3^u 10 = 3^{1+u}$ فأوجد قيمة: u

الحل

$$(2-u)(1-u)u10 = (1-u)(1-u)(u)(1+u) \therefore$$

$$1-u \therefore$$

$$3^u 10 = 3^{1+u}$$

$$10 = 1+u$$

حل آخر

$$\frac{u}{2-u} 10 = \frac{1+u}{1-u+u} \therefore$$

$$u10 = u(1+u) \therefore$$

$$10 = 1+u \therefore$$

$$3^u 10 = 3^{1+u}$$

$$\frac{u10}{2-u} = \frac{1+u}{1-u+u} \therefore$$

$$10 = 1+u \therefore$$

١٠ الترتيب في صف والترتيب في دائرة

أولاً: لترتيب n من العناصر في صف واحد فإن:

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الأول $= n$

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثاني $= (n-1)$

لاحظ أن: عدد الطرق لتقص طريقة واحدة بعد اختيار العنصر في المكان الأول.

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثالث $= (n-2)$ وهكذا

إلى أن تصل إلى آخر عنصر والذي يكون له طريقة واحدة

أي أن عدد طرق اختيار العنصر الأخير $= 1$

أي n عدد الطرق التي ترتب بها n من العناصر في صف واحد

$$n = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

أي أن عدد طرق ترتيب n من العناصر في صف واحد $= n!$

ثانياً: لترتيب n من العناصر في دائرة فإن:

الدائرة ليس بها نقطة بداية أو نقطة نهاية لذلك فلي يبدأ الترتيب إلا بعد وضع العنصر الأول في أي مكان على الدائرة وبعد ذلك يكون للعنصر الأول طريقة واحدة فقط وهي وضع في أي مكان والذي بمجرد وضعه في هذا المكان فيعتبر تحدد به بداية الدائرة ونهايتها بالآخرين ثم تبدأ ترتيب العناصر الأخرى ويكون:

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الأول $= 1$

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثاني $= (n-1)$

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثالث $= (n-2)$ وهكذا

إلى أن تصل إلى آخر عنصر الذي يكون له طريقة واحدة

أي أن عدد طرق اختيار العنصر الأخير $= 1$

أي أن عدد الطرق التي ترتب بها n من العناصر على دائرة

$$= 1 \times (n-1)(n-2) \dots 1 = (n-1)!$$

أي أن عدد طرق ترتيب n من العناصر على دائرة $= (n-1)!$

مثال ٦

بعض طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص في ٥ مقاعد بحيث يجلسون :
 ١ في صف واحد
 ٢ على شكل دائرة مستديرة.

الحل

١ يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا في صف واحد بعدة طرق عندها

$$= 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ طريقة}$$

٢ يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا على شكل دائرة بعدة طرق عندها

$$= \frac{5!}{5} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{5} = 24 \text{ طريقة}$$

مثال ٧

أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٦ طلاب على ٦ مقاعد في صف واحد

الحل

نبدأ ٦ مقاعد يراد اختيار ١ منها في كل مرة

$$\therefore \text{عدد الطرق} = 6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

مثال ٨

أوجد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها عند أخذ ٤ حروف من كلمة «المدرسة»

الحل

نبدأ ٧ حروف من كلمة «المدرسة» يراد اختيار ٤ حروف مختلفة في كل مرة

$$\therefore \text{عدد الطرق} = 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$$

مثال

مجلس إدارة شركة يتألف من ثمانية أعضاء بكم طريقة يمكن أن تختار منهم رئيساً وأميناً ومحاسباً ؟

الحل

لاختيار رئيس للشركة أمامنا ٨ اختيارات
لاختيار أميناً للشركة أمامنا ٧ اختيارات
لاختيار محاسباً للشركة أمامنا ٦ اختيارات
أي أننا أجرينا تبديلة على ٨ أشخاص ما خودة ثلاثة
∴ عدد الطرق = $8 \times 7 \times 6 = 336$

مثال

كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام ٧٤٦٤٥٤٤٣ يتكون من أربع خانات مختلفة ؟

الحل

الخانة	الأحاد	العشرات	المئات	الألف
عدد الاختيارات	٥	٤	٣	٢

∴ عدد الطرق = $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ عدداً

تمرين

عشر أسئلة من أسئلة الامتحان

الأسئلة التي فيها علامة نجمة (*) هي أسئلة اختيارية

أولاً اجمع معاً وأختبر نفسك

اختبار تراكمي ٨١

الدرجة النهائية ١٠



١) أجب عن الأسئلة الآتية .

- ١) المتتابعة التي قاعدتها $u_n = 1 + n$ تكون متتابعة
(تزايدية ، تناقصية ، ثابتة ، متناوبة)
- ٢) مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^n})$ يساوي
[٧٢ ، ٨٠ ، ٩٦ ، ٩٩]
- ٣) متتابعة هندسية مجموع u_n حذا الأول منها يعطى بالعلاقة $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$
فإن الحد السابع منها يساوي
[١٥ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ١٩٤]
- ٤) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٤٨ و ٧٢ فإن أساسها يساوي
[$\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$]

٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من لعناصر { ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ }
.....

٦) عدنان موجب وسطحها الحسائي يساوي ١٠ ووسطها الهندسي يساوي ٨
أوجد العددين .
.....

ثانياً مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[٢٤] \div [٤٢] \div [١٨] \div [٩]

١) $5 - 4 = \dots\dots\dots$

[١] \div [صفر] \div [١٠] \div [٥٠]

٢) $\frac{100}{99} + \dots\dots\dots$

[١] \div [صفر] \div [١] \div [غير محدد]

٣) $\frac{1}{1} = \dots\dots\dots$

٤) مجموعة حل المعادلة $x - 1 = 1$ هي $\dots\dots\dots$

[٢] \div [١٤٠] \div [١] \div [٢٤١]

٥) مجموعة حل المعادلة $x + 2 = 120$ هي $\dots\dots\dots$

[٢] \div [٣] \div [٤] \div [٥]

[٢] \div [٤] \div [٥] \div [٦]

٦) إذا كان $\frac{1}{1-x} = 7$ فإن $x = \dots\dots\dots$

[٢] \div [٤] \div [٥] \div [٦]

٧) إذا كان $\frac{5+x}{3+x} = 56$ فإن $x = \dots\dots\dots$

٨) إذا كان $\frac{4+x}{120} = (4+x)$ فإن $x + 3 = \dots\dots\dots$

[٢٠] \div [٦٠] \div [١٢٠] \div [١٨٠]

[٦] \div [٥] \div [صفر] \div [٢]

٩) $٩^٥ + ٩^٥ = \dots\dots\dots$

[٦] \div [٧] \div [٥] \div [٨]

١٠) إذا كان $٥.٤٠ = ٥$ فإن $x = \dots\dots\dots$

[٢] \div [٣] \div [٤] \div [٥]

١١) إذا كان $٤ = ٤$ فإن $x = \dots\dots\dots$

[٢] \div [٣] \div [٤] \div [٥]

١٢) إذا كان $١٢٠ = ١٢٠$ فإن $x = \dots\dots\dots$

[١] \div [صفر] \div [١] \div [٢]

١٣) إذا كان $٩٠ = ٩٠$ فإن $x = \dots\dots\dots$

١٤) لجنة مؤلفة من ١٠ أعضاء يكف طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس

[٢٠] \div [٦٠] \div [٤٥] \div [٩٠]

تهدم اللجنة = $\dots\dots\dots$

١٥) عدد طرق ترتيب ٦ أطفال في دائرة يساوي $\dots\dots\dots$ [٢٤] \div [٧٢٠] \div [٦] \div [١٨٠]

أجدر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① $10^3 = \dots\dots\dots$ [١ د ٢ ص ٣ صفر د ٤ -٥]
- ② $10^7 - 7 = \dots\dots\dots$ [٠ د ١٤ د ٢ د ٣٠]
- ③ $2 + 1 = \dots\dots\dots$ [٦ د ٨ د ٢٤ د ٣٦]
- ④ $5 - 2 = \dots\dots\dots$ [٢ د ٨ د ١٦ د ١٢]
- ⑤ إذا كان $10 = 21$ فإن $10^3 = \dots\dots\dots$ [٤ د ٢ د ٧٢ د ١٣٢]
- ⑥ إذا كان $10^3 = 60$ فإن $10^4 = \dots\dots\dots$ [٤ د ٣ د ٢ د ٥]
- ⑦ إذا كان $10^6 = 120$ فإن $10^7 = 3 - \dots\dots\dots$ [١ د ٢ د ٣ د ٤]
- ⑧ إذا كان $10^3 = 120$ فإن قيمة $10 = \dots\dots\dots$ [٦ د ٥ د ٤ د ٢]
- ⑨ إذا كان $10^3 = 10$ فإن $10^4 = \dots\dots\dots$ [١ د ٤ د ٥ د ٩]
- ⑩ عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها ٣ أشخاص على ٥ مقاعد تساوي

- [٥ د ١٢ د ١٥ د ٦٠]
- ⑪ عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوي

- [٤ د ٩ د ١٠ د ٢٤]
- ⑫ لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا عدد الطرق التي يمكن بها اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة تساوي
- [٢ د ٢٣ د ٦٦ د ١٣٢]
- ⑬ عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام {٣، ٤، ٥، ٦} تساوي
- [٨ د ٣٠ د ١٢ د ٤]
- ⑭ عدد طرق ترتيب ٧ أطفال في دائرة تساوي

- [١ د ٧ د ٧٢٠ د ٥٠٤٠]

- ⑮ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل ه بعد أن تكون أحد الأرقام ٨٤٥٤٤٣
- بينما باقي المنازل تتألف من أي رقم دون قيد ،كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟
- [٩٩٩٩٩ د ٤٠٠٠٠ د ٩٩٩٩٩٩ د ٩٠٠٠٠٠]

ثالثاً مسائل المستوى الثاني

- ١٤٠) كم طريقة يمكن احسام أن يتناول وجبه ومشروب من ثلاث وجبات (مكسنة - فراح - سلك) ومشروبين (عصير - مباد غازية) مثل ذلك بمخطط الشجرة البيانية
[١٠]
- ١٤١) كم عدد مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥؟
[١٠]
- ١٤٢) كم عدد مكوناً من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥؟
[١٠]
- ١٤٣) كم عدد أزوجاً مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥؟
[١٠]
- ١٤٤) كم عدداً من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ دون تكرار للرقم ٥؟
[١٠]
- ١٤٥) كم عدداً من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ وبداً على ٥؟
[١٠]
- ١٤٦) كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ يتألف من أربعة أرقام مختلفة ويبدأ بالقسمه على ٢؟
[١٠]
- ١٤٧) كم طريقة يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و ٤ سيدات
[١٠]
- ١٤٨) كم طريقة يمكن اختيار حرف صحيح وآخر معتل من أربعة حروف صحيحة وللازلة معتلة؟
[١٠]
- ١٤٩) تعطين مدرسه ثلاثه جوائز لاولى في القسم الأدبي والثانية في القسم العلمي والثالثة في قسم الرياضيات فإذا كان عدد المتسابقين ٨، ٧، ٤ على التوالي فكم طريقة يمكن توزيعها؟
[١٠]
- ١٥٠) كم يقدم أحد محلات الأيس كريم ثلاثه أحجام مختلفة وخمس نكهات (عصير - متوسط - كبير) (قراولة - مانجو - ليمون - حليب - شيكولاته) كم عدد الاختيارات المتاحة بشرط واحدة من الأيس كريم؟
[١٠]
- ١٥١) كم من مجموعة من الحروف { ا، ب، ج، د، هـ، و } أوجد
١) عدد طرق اختيار حرف واحد. ٢) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين. [١٠]
- ١٥٢) كم طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص في ٤ مقاعد على شكل دائرة؟
[١٠]

١٧) أوجد قيمة كل من:

١) $5 + 7$	٢) $3 - 1$	[٥]
٣) $5 - 3$	٤) $3 - 2$	[مطروح]
٥) 2×3	٦) 3×4	[٦]
٧) $2^2 \times 3^2$	٨) $2^2 + 3^2$	[٥]
٩) $2^3 + 3^3$	١٠) $2^3 + 3^3$	[٥، ١١]
١١) $\frac{10}{9}$	١٢) $\frac{100}{99}$	[١٠٠]

١٨) أوجد قيمة u التي تحقق كل من:

١) $1 = u$	٢) $74 = u$	[١٤٠]
٣) $120 = 2 - u$	٤) $0 = \frac{1+u}{u}$	[١]
٥) $42 = \frac{1+u}{1-u}$	٦) $120 = u^2$	[٢]
٧) $2730 = u^{10}$	٨) $720 = 3u^5$	[١٠]
٩) $210 = 2u^{2+u}$	١٠) $4 = u^5 + u^5$	[٢]
١١) $0 = -u^5 + u^5 + u^5$	١٢) $120 = u^5$	[٥]

١٩) أوجد قيمة u إذا كان:

١) $210 = u^7$	٢) $3 + u = 2 + u$	[٣]
٣) $24 = u(1+u)$	٤) $06 = u(1+u)$	[٢]
٥) $\frac{2+u}{24} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{u}$	٦) $12 = 1 - u$	[٣]

٢٠) إذا كان $u^2 = 60$ ، $24 = u$ أوجد $u - 1$

٢١) إذا كان $u = 120$ ، $120 = u^5$ أوجد $u - 1$

[٥] ٢٦ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، أوجد x و y

[٦] ٢٧ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، أوجد قيمة x

[٧] ٢٨ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، أوجد قيمة y

[٨] ٢٩ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، أوجد قيمة x و y

[٩] ٣٠ أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من سبعة أشخاص.

[١٠] ٣١ من بين ثمانية طلاب يمكن تعلم التربية البدنية / اختيار ثلاثة طلاب (واحد

[١١] ٣٢ تلوا الآخرين للاشتراك في فرق كرة القدم وكرة السلة والكرة الطائرة على الترتيب.

[١٢] ٣٣ أثبت أن $3x + 2y = 14$

[١٣] ٣٤ أثبت أن $3x + 2y = 14$

مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

[١٤] ٣٥ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، فأوجد قيمة x

[١٥] ٣٦ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، فأوجد قيمة y

[١٦] ٣٧ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، فما قيمة x و y

[١٧] ٣٨ أثبت أن $3x + 2y = 14$

[١٨] ٣٩ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، فأوجد أكبر قيمة للعدد x تحقق المتباينة السابقة.

[١٩] ٤٠ إذا كان $3x + 2y = 14$ ، فأوجد قيمة x و y

التوافيق

الحرس

٣

علماً فيما سبق أن التباديل هي إختيارات مرقبة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذة كلها أو بعضها في كل مرة وهي بعض الأحيان تحتاج إلى إجراء إختيارات بدون ترتيب.

فمثلاً

إذا كان أربعة لاعبة { ا ، ب ، هـ ، ز } وتقام مباريات لكرة القدم بنظام الدوري بين المرق بحيث تقام المباراة على ملعب الفريق المذكور أولاً فإن الترتيب هنا له أهمية فتكون الإختيارات الممكنة هي :

(ا ، ب) ، (ا ، هـ) ، (ا ، ز) ، (ب ، هـ) ، (ب ، ز) ، (هـ ، ز) ، (ا ، ب ، هـ) ، (ا ، ب ، ز) ، (ا ، هـ ، ز) ، (ب ، هـ ، ز) ، (ا ، ب ، هـ ، ز)

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « تبديلية »

إما إذا أردنا إقامة مباراة بين فريقين من فرق الأندية الأربعة في أحد الإحتفالات الرياضية ففي هذه الحالة لا يهم الترتيب وتكون الإختيارات الممكنة هي :

{ ا ، ب } ، { ا ، هـ } ، { ا ، ز } ، { ب ، هـ } ، { ب ، ز } ، { هـ ، ز }

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « توفيقية »



مما سبق نلاحظ أن:

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ لأن $(1, 2) \neq (2, 1)$
 أما $\{1, 2\}, \{2, 1\}$ فليكن $\{1, 2\}$ واحد لأن $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
 هي التباديل نهتم بالترتيب أما التوافيق لا نهتم بالترتيب.
 ومن ذلك يمكن تعريف التوافيق كما يلي:

تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من r من الأشياء المختارة من بين n من العناصر نفس الوقت هو C_n^r حيث: $r \geq 0, n \geq r, n \in \mathbb{N}$

معنى ذلك:

أن كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيبها
 «عناصر» المجموعة تسمى توفيقاً ويرمز لعدد المجموعات الجزئية التي يمكن
 تكوينها من n من العناصر والتي تكون عددها C_n^r (حيث $r \geq 0$) بالرمز C_n^r
 وتقرأ « n قاف r » أو بالرمز (C_n^r) وتقرأ « n فوق r »

فمثلاً

C_5^2 تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على 2 عناصر ويمكن
 تكوينها من مجموعة تحتوي على 5 عناصر وتقرأ «5 قاف 2» أو «5 فوق 2»

وأيضاً

C_5^1 تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على 1 عناصر ويمكن
 تكوينها من مجموعة تحتوي على 5 عناصر.

وبالنسبة لـ C_n^0 تعني عدد المجموعات الجزئية الخالية التي يمكن تكوينها من مجموعة
 تحتوي على n عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة أي أن $C_n^0 = 1$

وأيضاً

C_n^n وهي على عدد المجموعات الجزئية الرباعية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على
 n عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة حيث أن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها أي أن
 $C_n^n = 1$ أيضاً ونلاحظ في مثال الأندية الأربعة السابقة أننا نختار فريقين من 4 أندية وأن عدد
 التباديل يساوي 12 تبديلة وعدد التوافيق يساوي 6 توفيقاً.

أي أن التوافق في هذا المثال يساوي $10^4 = \frac{2 \times 4}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$

أي أن $\frac{2 \times 4}{2} = 10^4$

وبالمثل فإن $8 = \frac{2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = \frac{2 \times 4}{2} = 10^4$

ومنها يمكن استنتاج أن،
$$\frac{(1+r-u) \dots (2-u)(1-u)u}{1 \times 2 \times 3 \dots (2-r)(1-r)r} = \frac{u^u}{r^u} = r^{u-u}$$

وبفرض استخدامه إذا كانت r لها قيمة عددية.

$$\frac{u}{r-u} = r^{u-u}$$

$$\frac{u}{r-u} = r^{u-u}$$

وبفرض استخدامه إذا كانت r ليس لها قيمة عددية.

فمثلاً $10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{1}{1} = 10^1$

ويمكن استنتاج النتائج التالية،

ملحظة

$$r^{u-u} = r^{u-u} \quad (\text{قانون التبسيط})$$

وتستخدم هذه النتيجة لحساب القيمة العددية للتوفيق إذا كان $r < \frac{1}{2}$

فمثلاً

لإيجاد قيمة 10^{10} فإننا نلاحظ أن عدد أكبر من نصف 10 لذلك نستخدم النتيجة

فيكون $10^{10} = \frac{10 \times 10}{1 \times 2} = 10^{10} = 10^{10}$

فإن $1 = 10^u = r^{u-u}$

إذا كانت $r = 1$

وذلك لأن $10^{u-u} = 10^{u-u} = \frac{u}{u-u} = \frac{u}{u-u} = 1$

فمثلاً $1 = 10^6, 1 = 10^7 = 10^7$

$$u = 10^u$$

فمثلاً $1 = 10^6, 6 = 10^6, 7 = 10^7, 1+u = 10^{1+u}$ وهكذا

نتيجة ٧

إذا كان $u = v$ ، فإن $u = v$ أو $u = v + 1$

ملاحظة

هناك بعض الجمل الدالة على التوافق والتي لا نهتم بترتيبها.

- ١ اختيار مجموعة من الأشخاص (دون تحديد عمل كل منهم حسب الترتيب).
 - ٢ اختيار مجموعة جزئية من مجموعة كائنية.
 - ٣ الاختيار أو السحب دفعة واحدة (معاً) أو عشوائياً بدون ترتيب.
- مع ملاحظة أن:

(a, b) ، (b, a) تعبر عن تبديلين حيث نهتم بالترتيب هي التباديل.
أما $\{a, b\}$ ، $\{b, a\}$ تعبر عن توافق واحد حيث لا نهتم بالترتيب هي التوافيق.

مثال

أوجد ناتج كل من: ١ 10^6

٢ 10^4

٣ 10^3

الحل

$$10^6 = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{1} = \frac{10^6}{1} = 10^6$$

باستخدام الحاسبة

يمكن استخدام المفاتيح \div Shift من اليسار لليمن لكتابة رمز التوافق.

كما يلي، 15 الناتج \rightarrow \div Shift \rightarrow 6 \rightarrow ابدأ

$$10^4 = 10^4$$

$$10^3 = 10^3$$

مثال ٢

فاوجد قيمة u

إذا كان $u^2 = 28$

الحل

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{(1-u)u}{1 \times 2} \therefore$$

$$u = u - u^2$$

$$u = 0 - u - u^2 \therefore$$

$$u = (u + u)(u - u) \therefore u = 0 \quad \text{أو} \quad u = 0 \quad \text{(مرفوض لأن } u \neq 0 \text{)}$$

حل آخر ثان

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{u^2}{2} \therefore$$

$$u = 2 \cdot u^2 = 28$$

$$u \times u = 28 \therefore$$

$$u^2 = 28$$

$$u = 0 \therefore$$

حل آخر ثالث

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{u}{2 \cdot (2 - u)} \therefore$$

$$2 \cdot u = \frac{u - u^2}{2 - u} \therefore$$

$$u = 0 - u - u^2 \therefore u = 0 - u - u^2$$

$$u = 0 \therefore$$

$$u = (u + u)(u - u)$$

$$u = 0 \quad \text{(مرفوض لأن } u \neq 0 \text{)}$$

مثال ٣

إذا كان $u^2 = 120$ ، فاوجد قيمة كل من u و v

الحل

$$u^2 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{u^2}{2}$$

$$2 \cdot u = u^2$$

$$u = 0 \therefore$$

١٠	٧٢٠
٩	٧٢
٨	٨
١	

$$8 \times 9 \times 10 = 720$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$4 = 2^2$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$720 = \frac{2^4 \times 3^2 \times 5}{2^2} \times 24$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$4 = 2^2$$

مثال

أوجد قيمة x

$$25 = \frac{1}{x} \times 100$$

الحل

$$25 = \frac{1}{x} \times 100$$

$$25 = \frac{100}{x}$$

$$100 = 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$$

$$7 = 2 \times 3$$

$$840 = 4 \times 25 = 100$$

$$25 = \frac{1}{x} \times 100$$

$$\frac{100}{x} = 25$$

لاحظ أن

مثال

أوجد قيمة x

$$2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

الحل

$$2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$(2+)$$

$$2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$$

$$10 = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$$

$$2 - 10 = \frac{1}{x}$$

$$(4+) \quad 12 = \frac{1}{x}$$

$$2 = \frac{1}{x}$$

إذا كان $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

$$3 = x$$

$$2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$$

مثال ٦

إذا كان ${}^nP_2 = 120$ ، ${}^nP_3 = 715$ أوجد قيمة n ، r

الحل

$${}^nP_2 = 120$$

$$2 = n - r$$

$${}^nP_3 = 715$$

$$120 = {}^nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$13 = n - r$$

يحل ١ ، ٢ معًا بالتجمع

$$n = 13$$

وبالتعويض في ٢ عن n

$$r = 2$$

$${}^nP_r = 5 \times 4 \times 3 = {}^nP_3$$

①

$$715 = \frac{{}^nP_3}{3}$$

$${}^nP_3 = 13$$

②

١٠	1716
١١	1716
١٢	105
١٣	13
	1

مثال ٧

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخص

الحل

∴ الاختيار لا يعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توافيقًا

$$\text{عدد الاختيارات} = {}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$$

مثال ٨

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين تتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص في كلتا اللجنتين

الحل

$$\text{عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى} = {}^{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$$

وبعد اختيار اللجنة الأولى فإننا نلاحظ أن عدد الأشخاص أصبح ٦ أشخاص نختار منهم لجنة من ٤ أشخاص.

عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية = ${}^4P_2 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 6$ طرق
عدد الطرق التي يتم بها انتخاب اللجنتين = $10 \times 6 = 60$ طرق

مثال

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من بين ١٢ طالبًا و ٩ طالبات بحيث تتكون اللجنة من:
١) أربعة طلبة وثلاث طالبات.
٢) أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات.

الحل

عدد طرق اختيار ٤ طلبة من بين ١٢ طالب = ${}^{12}C_4 = 495$

إذا كان الربط بين اختيارين يعرف

«و» فإننا نضرب ناتج الاختيارين

إذا كان الربط بين اختيارين يعرف

«أو» فإننا نجمع ناتج الاختيارين

عدد طرق اختيار ٣ طالبات من بين ٩ طالبات = ${}^9C_3 = 84$

١) عدد طرق اختيار أربعة طلبة وثلاث طالبات

$$= 84 \times 495 = 41580 \text{ طريقة}$$

٢) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

$$= 84 + 495 = 579 \text{ طريقة}$$

مثلث باسكال :

تنظيم

بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢) ، هو فيلسوف فرنسي ورياضي وفيزيائي قدم نظرية الاحتمالات وصمم تنظيمًا ثلاثيًا من الأرقام سمي مثلث باسكال في حساب الاحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدي عمليات الجمع والضرب.
من تأمل مثلث الأعداد المقابل ،

١) الصف الأول ،

يمثل (١ = ١) من العناصر مأخوذ منها

$$١ = ٠ \text{ أو } ١ = ١$$

$$\text{فيكون } ١ = ٠ \text{ و } ١ = ١$$

٢) الصف الثاني ،

يمثل (٢ = ١) من العناصر مأخوذ منها

$$١ = ٠ \text{ أو } ١ = ١ \text{ أو } ٢ = ١ \text{ في كل مرة}$$

$$\text{فيكون } ١ = ٠ \text{ و } ١ = ١ \text{ و } ٢ = ١ \text{ و } ٢ = ١ \text{ وهكذا ...}$$



٢. كل صف يبدأ بالواحد لأن $1 = 1$ وينتهي بالواحد لأن $1 = 1$
٣. كل عدد في أي صف باستثناء الصف الأول يساوي مجموع العددين الموجودين
فمثلاً الصف الثالث $1, 1, 1$ وهكذا.
٤. يوجد تماثل حول العدد الذي يوسط الصف (إذا كانت n فردية)
٥. يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت n زوجية)

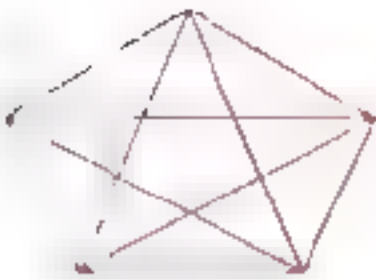
نشاط فطر الشكل الهندسي :

هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متجابين

عدد أقطار المثلث = ٣

عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥



عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه n

$$\frac{n(n-3)}{2} =$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل السداسي} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل السباعي} = \frac{7(7-3)}{2} = 14$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل ذو عشرة أضلاع} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

كما يمكن استخدام القاعدة التالية ،

عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه n

$$n^2 - 3n =$$

$$\text{ويكون عدد أقطار الشكل السداسي} = 1^2 - 3 \times 1 = 9$$

تمرين

أولاً راجع معنا واختر نفسك

اختبار تراكمي ٩

الدرجة الكلية



١. اجب عن الاسئلة الآتية :

١. $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

٢. مجموعة حل المعادلة $x - 2 = 1$ هي

٣. إذا كان $x = 1$ فإن $y = \{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$

٤. إذا كان a, b, c ثلاث حدود موجبة ومتتالية عن متتابعة هندسية

فإن $b > \frac{a+c}{2}$ $b > \frac{a+c}{2}$ $b > \frac{a+c}{2}$

٥. أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(١) $1 - x = 2x$ (ب) $x^3 + x^2 + x = 0$

٦. أوجد متتابعة الحسابية التي حدها السادس يساوي ٢، والنسبة بين حديها

الرابع والعاشر كنسبة $4:7$

الاجابة مسائل المستوى الاول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١) $2^3 \times 3^2 =$
 [١٠ د ٢٠ د ١٨ د ١٢٠ د]
- ٢) $5^3 \times 2^2 =$
 [صفر د ١ د ٥ د ٢٥ د]
- ٣) $4^3 \times 3^2 =$
 [١ د ٩ د ٨ د ٦٠ د]
- ٤) $3^3 \times 2^2 =$
 [١ د ٥ د ٦ د صفر د]
- ٥) $2^3 \times 3^2 =$
 [١ د ١٢ د ١٠ د ١٢٠ د]
- ٦) $3^3 \times 2^2 =$
 [٢ د ١٢ د ١٠ د ١٢٠ د]
- ٧) $4^3 \times 3^2 =$
 [١ د صفر د ٩٩ د ١٠٠ د]
- ٨) $5^3 \times 2^2 =$
 [١٩ د ١٠٠ د ٥٠ د ١ د]

٣) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ٢٥$ أوجد قيمة : ٣

٤) مدرسة بها ١٢ معلم يراد تشكيل لجنة مكونة من ٤ معلمين بكم طريقة ؟ (١٠)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١) $2^3 + 3^2 + 4^1 =$
 [٥ د ٦ د ٧ د ٨ د]
- ٢) $2^3 + 3^2 + 4^1 + 5^0 + 6^1 + 7^0 + 8^1 =$
 [١٦ د ٣٢ د ٤٦ د ٦٤ د]
- ٣) $2^3 \times 3^2 = ١٨$
 [٩٨ د ٢ د ٤٩٥٠ د ١٠٠ د]
- ٤) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ٢١$ فإن ٣
 [٧ د ٨ د ٩ د ١٠ د]
- ٥) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ٧$ فإن ٣
 [٧ د ٨ د ٩ د ١٠ د]
- ٦) إذا كان $2^3 - 3^2 = ١٠$ فإن ٣
 [١ د ٢ د ٣ د ٧ د]
- ٧) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ١٠$ فإن ٣
 [١ د ٢ د ٣ د صفر د]
- ٨) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ٢٨$ فإن ٣
 [٢ د ١ د ٦ د ٨ د]
- ٩) إذا كان $2^3 \times 3^2 = ٢٠$ فإن ٣
 [٢ د ٦ د ٨ د ١٠ د]

١٠) إذا كان ${}^nP_r = {}^nPr$ فإن $n = \dots$

١١) إذا كان ${}^nP_1 + {}^nP_2 + {}^nP_3 + \dots + {}^nP_n = 31$ فإن $n = \dots$

١٢) عدد طرق اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص يساوي

١٣) ٣٦ ١٨ ٣٠٢٤ ١٢٠

١٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه،

١) عدد الطرق التي يمكن تشكيل لجنة من ٢ طلاب من بين ٩ طلاب =

٢) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص =

٣) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط في امتحان يحتوي على ٩ أسئلة =

٤) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء =

٥) عدد المجموعات الجزئية ذات العنصرين التي يمكن تكوينها من $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ يساوي

٦) إذا كان ${}^nP_1 = 35$ فإن $n = \dots$

٧) إذا كان ${}^nP_1 + {}^nP_2 + \dots + {}^nP_n = 31$ فإن $n = \dots$

٨) إذا كان ${}^nP_1 + {}^nP_2 + \dots + {}^nP_n = 31$ فإن $n = \dots$

٩) إذا كان ${}^nP_1 + {}^nP_2 + \dots + {}^nP_n = 31$ فإن $n = \dots$

١٠) إذا كان ${}^nP_1 + {}^nP_2 + \dots + {}^nP_n = 31$ فإن $n = \dots$

١٧ إذا كانت المجموعة $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ أوجد

① عدد المجموعات الحزئية الثنائية لهذه المجموعة.

② عدد المجموعات الحزئية الثلاثية لهذه المجموعة.

[١١١٥]

مسائل للمستوى الثاني

١٨ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية. [١١]

١٩ بكم طريقة يمكن إنتخاب لجننتين لتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص في كلتا اللجنتين. [٣١٥٠]

٢٠ من بين ١٠ معلمين A ، B معلمات في مدرسة بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من ٤ معلمين و ٣ معلمات لتعمل المدرسة في مناسبة ما ؟ [١١٧٦٠]

٢١ يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب A ، طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف ؟ [٣٣٩٠]

٢٢ من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأوليمبياد في مادة الرياضيات ثم معلم آخر لإعداد الاختبار أوجد عدد طرق الاختيار. [١٢]

٢٣ إذا كان $3^x = 120$ أوجد قيمة $3^y - 9$. [١١]

٢٤ إذا كان $3^x - 3^y = 84$ فما قيمة $|x - y|$. [١٩]

٢٥ إذا كان $3^x - 3^y = 21$ فما قيمة 3^x . [١٠]

٢٦ إذا كان $3^x = 3$ ، $3^y = 3^{x+2}$ ، $3^z = 3^{x+y+2}$ أوجد قيمة $|x - z|$. [٢]

٢٧ إذا كان $3^x = 108$ ، $3^y = 108$ ، $3^z = 108$ أوجد قيمة x, y, z . [٢٤١٥]

٢٨ إذا كان $3^x = 24$ ، $3^y = 24$ ، $3^z = 24$ أوجد أقل قيمة لعدد x, y, z التي تجعل هذه العلاقة صحيحة. [١١١٥]

٢٩ إذا كان $3^x + 3^y = 3^z$ ، $3^x = 9$ ، $3^y = 9$ أوجد قيمة z . [١٩]

فأوجد قيمة n

٢٥ إذا كان ${}^nP_3 = {}^nP_4$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

أوجد قيمة n

٢٦ إذا كان ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

فأوجد قيمة n

٢٧ إذا كان ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

فأوجد قيمة n

٢٨ إذا كانت ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

٢٩ إذا كان ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

أكتب بدلالة التباديل كل من:

١ nP_1	٢ nP_2	٣ nP_3	٤ nP_4
٥ nP_5	٦ nP_6	٧ nP_7	٨ nP_8

أكتب مستخدماً الصورة nP_r كل مما يأتي:

١ $\frac{{}^nP_3}{3}$	٢ $\frac{{}^nP_4}{4}$	٣ $\frac{{}^nP_5}{5}$
٤ $\frac{{}^nP_6}{6}$	٥ $\frac{{}^nP_7}{7}$	٦ $\frac{{}^nP_8}{8}$

الأسئلة

٢٧ اختر لإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$ ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

[١ ٤ ٤ ٥ ٤ ٦]

٢ ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$ ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

٣ إذا كان ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$ ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

[١ ٤ ٤ ٥ ٤ ٦]

٤ إذا كان ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$ ${}^nP_2 = {}^nP_3$ $2:3 = 1:2$

[١ ٤ ٤ ٥ ٤ ٦]



⑤ إذا كان $u^2 + v^2 = 720 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5$ فإن $u = \dots$

[19 4 25 4 31 4 28]

⑥ إذا كان u^2, v^2, w^2 هي تتابع حسابي فإن $u = \dots$

[11 4 12 4 13 4 14]

⑦ إذا كان $u^2 + v^2 = 1 + u^2 + v^2$ فإن $\dots = \frac{1 + u^{10} + v^{10}}{u^{10} + 1 - v^{10}}$

[$\frac{v}{1+v}$ 4 $\frac{12-v}{1-v}$ 4 $\frac{v-16}{1+v}$ 4 $\frac{16-v}{v}$]

⑧ إذا كان $u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2$ وكان $\frac{1+v}{u} = \dots$ فإن $\frac{A}{B} = \frac{1 - v^2 u^2 + 2 - v^2 u^2}{v^2 u^2 + 1 - v^2 u^2}$

[2 4 3 4 4 4 5]

فإن $v = \dots$

فأثبت أن: $u < 10$

⑦٨ إذا كان $u^2 < v^2$

⑦٩ إذا كان $u^2 < v^2$ فما قيمة: $[v - 1]$

[1]

أوجد قيمة: u

[14]

⑦٠ إذا كان $u^2 + v^2 = 5 + u^2 + v^2$

⑦١ إذا كان $u^2 + v^2 = 1 + u^2 + v^2$: $2 = 1 + u^2 + v^2$: $5 = 2 + u^2 + v^2$: $7 = 5 + u^2 + v^2$: $11 = 7 + u^2 + v^2$: $17 = 11 + u^2 + v^2$: $25 = 17 + u^2 + v^2$: $37 = 25 + u^2 + v^2$: $53 = 37 + u^2 + v^2$: $73 = 53 + u^2 + v^2$: $97 = 73 + u^2 + v^2$: $127 = 97 + u^2 + v^2$: $167 = 127 + u^2 + v^2$: $211 = 167 + u^2 + v^2$: $263 = 211 + u^2 + v^2$: $323 = 263 + u^2 + v^2$: $391 = 323 + u^2 + v^2$: $467 = 391 + u^2 + v^2$: $551 = 467 + u^2 + v^2$: $643 = 551 + u^2 + v^2$: $743 = 643 + u^2 + v^2$: $851 = 743 + u^2 + v^2$: $967 = 851 + u^2 + v^2$: $1091 = 967 + u^2 + v^2$: $1223 = 1091 + u^2 + v^2$: $1363 = 1223 + u^2 + v^2$: $1511 = 1363 + u^2 + v^2$: $1667 = 1511 + u^2 + v^2$: $1831 = 1667 + u^2 + v^2$: $2003 = 1831 + u^2 + v^2$: $2183 = 2003 + u^2 + v^2$: $2371 = 2183 + u^2 + v^2$: $2567 = 2371 + u^2 + v^2$: $2771 = 2567 + u^2 + v^2$: $2983 = 2771 + u^2 + v^2$: $3203 = 2983 + u^2 + v^2$: $3431 = 3203 + u^2 + v^2$: $3667 = 3431 + u^2 + v^2$: $3911 = 3667 + u^2 + v^2$: $4163 = 3911 + u^2 + v^2$: $4423 = 4163 + u^2 + v^2$: $4691 = 4423 + u^2 + v^2$: $4967 = 4691 + u^2 + v^2$: $5251 = 4967 + u^2 + v^2$: $5543 = 5251 + u^2 + v^2$: $5843 = 5543 + u^2 + v^2$: $6151 = 5843 + u^2 + v^2$: $6467 = 6151 + u^2 + v^2$: $6791 = 6467 + u^2 + v^2$: $7123 = 6791 + u^2 + v^2$: $7463 = 7123 + u^2 + v^2$: $7811 = 7463 + u^2 + v^2$: $8167 = 7811 + u^2 + v^2$: $8531 = 8167 + u^2 + v^2$: $8903 = 8531 + u^2 + v^2$: $9283 = 8903 + u^2 + v^2$: $9671 = 9283 + u^2 + v^2$: $10067 = 9671 + u^2 + v^2$: $10471 = 10067 + u^2 + v^2$: $10883 = 10471 + u^2 + v^2$: $11303 = 10883 + u^2 + v^2$: $11731 = 11303 + u^2 + v^2$: $12167 = 11731 + u^2 + v^2$: $12611 = 12167 + u^2 + v^2$: $13063 = 12611 + u^2 + v^2$: $13523 = 13063 + u^2 + v^2$: $13991 = 13523 + u^2 + v^2$: $14467 = 13991 + u^2 + v^2$: $14951 = 14467 + u^2 + v^2$: $15443 = 14951 + u^2 + v^2$: $15943 = 15443 + u^2 + v^2$: $16451 = 15943 + u^2 + v^2$: $16967 = 16451 + u^2 + v^2$: $17491 = 16967 + u^2 + v^2$: $18023 = 17491 + u^2 + v^2$: $18563 = 18023 + u^2 + v^2$: $19111 = 18563 + u^2 + v^2$: $19667 = 19111 + u^2 + v^2$: $20231 = 19667 + u^2 + v^2$: $20803 = 20231 + u^2 + v^2$: $21383 = 20803 + u^2 + v^2$: $21971 = 21383 + u^2 + v^2$: $22567 = 21971 + u^2 + v^2$: $23171 = 22567 + u^2 + v^2$: $23783 = 23171 + u^2 + v^2$: $24403 = 23783 + u^2 + v^2$: $25031 = 24403 + u^2 + v^2$: $25667 = 25031 + u^2 + v^2$: $26311 = 25667 + u^2 + v^2$: $26963 = 26311 + u^2 + v^2$: $27623 = 26963 + u^2 + v^2$: $28291 = 27623 + u^2 + v^2$: $28967 = 28291 + u^2 + v^2$: $29651 = 28967 + u^2 + v^2$: $30343 = 29651 + u^2 + v^2$: $31043 = 30343 + u^2 + v^2$: $31751 = 31043 + u^2 + v^2$: $32467 = 31751 + u^2 + v^2$: $33191 = 32467 + u^2 + v^2$: $33923 = 33191 + u^2 + v^2$: $34663 = 33923 + u^2 + v^2$: $35411 = 34663 + u^2 + v^2$: $36167 = 35411 + u^2 + v^2$: $36931 = 36167 + u^2 + v^2$: $37703 = 36931 + u^2 + v^2$: $38483 = 37703 + u^2 + v^2$: $39271 = 38483 + u^2 + v^2$: $40067 = 39271 + u^2 + v^2$: $40871 = 40067 + u^2 + v^2$: $41683 = 40871 + u^2 + v^2$: $42503 = 41683 + u^2 + v^2$: $43331 = 42503 + u^2 + v^2$: $44167 = 43331 + u^2 + v^2$: $45011 = 44167 + u^2 + v^2$: $45863 = 45011 + u^2 + v^2$: $46723 = 45863 + u^2 + v^2$: $47591 = 46723 + u^2 + v^2$: $48467 = 47591 + u^2 + v^2$: $49351 = 48467 + u^2 + v^2$: $50243 = 49351 + u^2 + v^2$: $51143 = 50243 + u^2 + v^2$: $52051 = 51143 + u^2 + v^2$: $52967 = 52051 + u^2 + v^2$: $53891 = 52967 + u^2 + v^2$: $54823 = 53891 + u^2 + v^2$: $55763 = 54823 + u^2 + v^2$: $56711 = 55763 + u^2 + v^2$: $57667 = 56711 + u^2 + v^2$: $58631 = 57667 + u^2 + v^2$: $59603 = 58631 + u^2 + v^2$: $60583 = 59603 + u^2 + v^2$: $61571 = 60583 + u^2 + v^2$: $62567 = 61571 + u^2 + v^2$: $63571 = 62567 + u^2 + v^2$: $64583 = 63571 + u^2 + v^2$: $65603 = 64583 + u^2 + v^2$: $66631 = 65603 + u^2 + v^2$: $67667 = 66631 + u^2 + v^2$: $68711 = 67667 + u^2 + v^2$: $69763 = 68711 + u^2 + v^2$: $70823 = 69763 + u^2 + v^2$: $71891 = 70823 + u^2 + v^2$: $72967 = 71891 + u^2 + v^2$: $74051 = 72967 + u^2 + v^2$: $75143 = 74051 + u^2 + v^2$: $76243 = 75143 + u^2 + v^2$: $77351 = 76243 + u^2 + v^2$: $78467 = 77351 + u^2 + v^2$: $79591 = 78467 + u^2 + v^2$: $80723 = 79591 + u^2 + v^2$: $81863 = 80723 + u^2 + v^2$: $83011 = 81863 + u^2 + v^2$: $84167 = 83011 + u^2 + v^2$: $85331 = 84167 + u^2 + v^2$: $86503 = 85331 + u^2 + v^2$: $87683 = 86503 + u^2 + v^2$: $88871 = 87683 + u^2 + v^2$: $90067 = 88871 + u^2 + v^2$: $91271 = 90067 + u^2 + v^2$: $92483 = 91271 + u^2 + v^2$: $93703 = 92483 + u^2 + v^2$: $94931 = 93703 + u^2 + v^2$: $96167 = 94931 + u^2 + v^2$: $97411 = 96167 + u^2 + v^2$: $98663 = 97411 + u^2 + v^2$: $99923 = 98663 + u^2 + v^2$: $101191 = 99923 + u^2 + v^2$: $102467 = 101191 + u^2 + v^2$: $103751 = 102467 + u^2 + v^2$: $105043 = 103751 + u^2 + v^2$: $106343 = 105043 + u^2 + v^2$: $107651 = 106343 + u^2 + v^2$: $108967 = 107651 + u^2 + v^2$: $110291 = 108967 + u^2 + v^2$: $111623 = 110291 + u^2 + v^2$: $112963 = 111623 + u^2 + v^2$: $114311 = 112963 + u^2 + v^2$: $115667 = 114311 + u^2 + v^2$: $117031 = 115667 + u^2 + v^2$: $118403 = 117031 + u^2 + v^2$: $119783 = 118403 + u^2 + v^2$: $121171 = 119783 + u^2 + v^2$: $122567 = 121171 + u^2 + v^2$: $123971 = 122567 + u^2 + v^2$: $125383 = 123971 + u^2 + v^2$: $126803 = 125383 + u^2 + v^2$: $128231 = 126803 + u^2 + v^2$: $129667 = 128231 + u^2 + v^2$: $131111 = 129667 + u^2 + v^2$: $132563 = 131111 + u^2 + v^2$: $134023 = 132563 + u^2 + v^2$: $135491 = 134023 + u^2 + v^2$: $136967 = 135491 + u^2 + v^2$: $138451 = 136967 + u^2 + v^2$: $139953 = 138451 + u^2 + v^2$: $141463 = 139953 + u^2 + v^2$: $142981 = 141463 + u^2 + v^2$: $144507 = 142981 + u^2 + v^2$: $146041 = 144507 + u^2 + v^2$: $147583 = 146041 + u^2 + v^2$: $149133 = 147583 + u^2 + v^2$: $150691 = 149133 + u^2 + v^2$: $152257 = 150691 + u^2 + v^2$: $153831 = 152257 + u^2 + v^2$: $155413 = 153831 + u^2 + v^2$: $157003 = 155413 + u^2 + v^2$: $158601 = 157003 + u^2 + v^2$: $160207 = 158601 + u^2 + v^2$: $161821 = 160207 + u^2 + v^2$: $163443 = 161821 + u^2 + v^2$: $165073 = 163443 + u^2 + v^2$: $166711 = 165073 + u^2 + v^2$: $168357 = 166711 + u^2 + v^2$: $170011 = 168357 + u^2 + v^2$: $171673 = 170011 + u^2 + v^2$: $173343 = 171673 + u^2 + v^2$: $175021 = 173343 + u^2 + v^2$: $176707 = 175021 + u^2 + v^2$: $178401 = 176707 + u^2 + v^2$: $180103 = 178401 + u^2 + v^2$: $181813 = 180103 + u^2 + v^2$: $183531 = 181813 + u^2 + v^2$: $185257 = 183531 + u^2 + v^2$: $186991 = 185257 + u^2 + v^2$: $188733 = 186991 + u^2 + v^2$: $190483 = 188733 + u^2 + v^2$: $192241 = 190483 + u^2 + v^2$: $194007 = 192241 + u^2 + v^2$: $195781 = 194007 + u^2 + v^2$: $197563 = 195781 + u^2 + v^2$: $199353 = 197563 + u^2 + v^2$: $201151 = 199353 + u^2 + v^2$: $202957 = 201151 + u^2 + v^2$: $204771 = 202957 + u^2 + v^2$: $206593 = 204771 + u^2 + v^2$: $208423 = 206593 + u^2 + v^2$: $210261 = 208423 + u^2 + v^2$: $212107 = 210261 + u^2 + v^2$: $213961 = 212107 + u^2 + v^2$: $215823 = 213961 + u^2 + v^2$: $217693 = 215823 + u^2 + v^2$: $219571 = 217693 + u^2 + v^2$: $221457 = 219571 + u^2 + v^2$: $223351 = 221457 + u^2 + v^2$: $225253 = 223351 + u^2 + v^2$: $227163 = 225253 + u^2 + v^2$: $229081 = 227163 + u^2 + v^2$: $231007 = 229081 + u^2 + v^2$: $232941 = 231007 + u^2 + v^2$: $234883 = 232941 + u^2 + v^2$: $236833 = 234883 + u^2 + v^2$: $238791 = 236833 + u^2 + v^2$: $240757 = 238791 + u^2 + v^2$: $242731 = 240757 + u^2 + v^2$: $244713 = 242731 + u^2 + v^2$: $246703 = 244713 + u^2 + v^2$: $248701 = 246703 + u^2 + v^2$: $250707 = 248701 + u^2 + v^2$: $252721 = 250707 + u^2 + v^2$: $254743 = 252721 + u^2 + v^2$: $256773 = 254743 + u^2 + v^2$: $258811 = 256773 + u^2 + v^2$: $260857 = 258811 + u^2 + v^2$: $262911 = 260857 + u^2 + v^2$: $264973 = 262911 + u^2 + v^2$: $267043 = 264973 + u^2 + v^2$: $269121 = 267043 + u^2 + v^2$: $271207 = 269121 + u^2 + v^2$: $273301 = 271207 + u^2 + v^2$: $275403 = 273301 + u^2 + v^2$: $277513 = 275403 + u^2 + v^2$: $279631 = 277513 + u^2 + v^2$: $281757 = 279631 + u^2 + v^2$: $283891 = 281757 + u^2 + v^2$: $286033 = 283891 + u^2 + v^2$: $288183 = 286033 + u^2 + v^2$: $290341 = 288183 + u^2 + v^2$: $292507 = 290341 + u^2 + v^2$: $294681 = 292507 + u^2 + v^2$: $296863 = 294681 + u^2 + v^2$: $299053 = 296863 + u^2 + v^2$: $301251 = 299053 + u^2 + v^2$: $303457 = 301251 + u^2 + v^2$: $305671 = 303457 + u^2 + v^2$: $307893 = 305671 + u^2 + v^2$: $310123 = 307893 + u^2 + v^2$: $312361 = 310123 + u^2 + v^2$: $314607 = 312361 + u^2 + v^2$: $316861 = 314607 + u^2 + v^2$: $319123 = 316861 + u^2 + v^2$: $321393 = 319123 + u^2 + v^2$: $323671 = 321393 + u^2 + v^2$: $325957 = 323671 + u^2 + v^2$: $328251 = 325957 + u^2 + v^2$: $330553 = 328251 + u^2 + v^2$: $332863 = 330553 + u^2 + v^2$: $335181 = 332863 + u^2 + v^2$: $337507 = 335181 + u^2 + v^2$: $339841 = 337507 + u^2 + v^2$: $342183 = 339841 + u^2 + v^2$: $344533 = 342183 + u^2 + v^2$: $346891 = 344533 + u^2 + v^2$: $349257 = 346891 + u^2 + v^2$: $351631 = 349257 + u^2 + v^2$: $354013 = 351631 + u^2 + v^2$: $356403 = 354013 + u^2 + v^2$: $358801 = 356403 + u^2 + v^2$: $361207 = 358801 + u^2 + v^2$: $363621 = 361207 + u^2 + v^2$: $366043 = 363621 + u^2 + v^2$: $368473 = 366043 + u^2 + v^2$: $370911 = 368473 + u^2 + v^2$: $373357 = 370911 + u^2 + v^2$: $375811 = 373357 + u^2 + v^2$: $378273 = 375811 + u^2 + v^2$: $380743 = 378273 + u^2 + v^2$: $383221 = 380743 + u^2 + v^2$: $385707 = 383221 + u^2 + v^2$: $388201 = 385707 + u^2 + v^2$: $390703 = 388201 + u^2 + v^2$: $393213 = 390703 + u^2 + v^2$: $395731 = 393213 + u^2 + v^2$: $398257 = 395731 + u^2 + v^2$: $400791 = 398257 + u^2 + v^2$: $403343 = 400791 + u^2 + v^2$: $405903 = 403343 + u^2 + v^2$: $408471 = 405903 + u^2 + v^2$: $411047 = 408471 + u^2 + v^2$: $413631 = 411047 + u^2 + v^2$: $416223 = 413631 + u^2 + v^2$: $418823 = 416223 + u^2 + v^2$: $421431 = 418823 + u^2 + v^2$: $424047 = 421431 + u^2 + v^2$: $426671 = 424047 + u^2 + v^2$: $429303 = 426671 + u^2 + v^2$: $431943 = 429303 + u^2 + v^2$: $434591 = 431943 + u^2 + v^2$: $437247 = 434591 + u^2 + v^2$: $439911 = 437247 + u^2 + v^2$: $442583 = 439911 + u^2 + v^2$: $445263 = 442583 + u^2 + v^2$: $447951 = 445263 + u^2 + v^2$: $450647 = 447951 + u^2 + v^2$: $453351 = 450647 + u^2 + v^2$: $456063 = 453351 + u^2 + v^2$: $458783 = 456063 + u^2 + v^2$: $461511 = 458783 + u^2 + v^2$: $464247 = 461511 + u^2 + v^2$: $466991 = 464247 + u^2 + v^2$: $469743 = 466991 + u^2 + v^2$: $472503 = 469743 + u^2 + v^2$: $475271 = 472503 + u^2 + v^2$: $478047 = 475271 + u^2 + v^2$: $480831 = 478047 + u^2 + v^2$: $483623 = 480831 + u^2 + v^2$: $486423 = 483623 + u^2 + v^2$: $489231 = 486423 + u^2 + v^2$: $492047 = 489231 + u^2 + v^2$: $494871 = 492047 + u^2 + v^2$: $497703 = 494871 + u^2 + v^2$: $500543 = 497703 + u^2 + v^2$: $503391 = 500543 + u^2 + v^2$: $506247 = 503391 + u^2 + v^2$: $509111 = 506247 + u^2 + v^2$: $511983 = 509111 + u^2 + v^2$: $514863 = 511983 + u^2 + v^2$: $517751 = 514863 + u^2 + v^2$: $520647 = 517751 + u^2 + v^2$: $523551 = 520647 + u^2 + v^2$: $526463 = 523551 + u^2 + v^2$: $529383 = 526463 + u^2 + v^2$: $532311 = 529383 + u^2 + v^2$: $535247 = 532311 + u^2 + v^2$: $538191 = 535247 + u^2 + v^2$: $541143 = 538191 + u^2 + v^2$: $544103 = 541143 + u^2 + v^2$: $547071 = 544103 + u^2 + v^2$: $550047 = 547071 + u^2 + v^2$: $553031 = 550047 + u^2 + v^2$: $556023 = 553031 + u^2 + v^2$: $559023 = 556023 + u^2 + v^2$: $562031 = 559023 + u^2 + v^2$: $565047 = 562031 + u^2 + v^2$: $568071 = 565047 + u^2 + v^2$: $571103 = 568071 + u^2 + v^2$: $574143 = 571103 + u^2 + v^2$: $577191 = 574143 + u^2 + v^2$: $580247 = 577191 + u^2 + v^2$: $583311 = 580247 + u^2 + v^2$: $586383 = 583311 + u^2 + v^2$: $589463 = 586383 + u^2 + v^2$: $592551 = 589463 + u^2 + v^2$: $595647 = 592551 + u^2 + v^2$: $598751 = 595647 + u^2 + v^2$: $601863 = 598751 + u^2 + v^2$: $604983 = 601863 + u^2 + v^2$: $608111 = 604983 + u^2 + v^2$: $611247 = 608111 + u^2 + v^2$: $614391 = 611247 + u^2 + v^2$: $617543 = 614391 + u^2 + v^2$: $620703 = 617543 + u^2 + v^2$: $623871 = 620703 + u^2 + v^2$: $627047 = 623871 + u^2 + v^2$: $630231 = 627047 + u^2 + v^2$: $633423 = 630231 + u^2 + v^2$: $636623 = 633423$

ثانيًا : التفاضل والتكامل

الوحدة الثالثة :

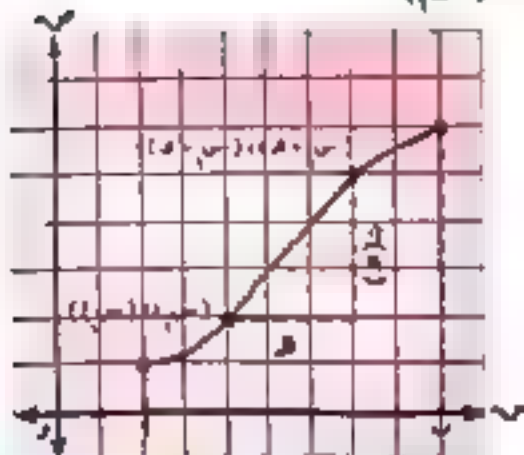
- الدرس ① . معدل التغير
- الدرس ② الإستقلاق
- الدرس ③ قواعد الإستقلاق
- الدرس ④ مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- الدرس ⑤ : مشتقات الدوال المثلثية
- الدرس ⑥ ، تطبيقات على المشتقات
- الدرس ⑦ : التكامل



معدل لتغير



إذا كانت $d = f(x)$ حيث $x = d$ فإن أي تغير في قيمة x من x_1 إلى x_2 في مجال d يقابله تغير في قيمة y من y_1 إلى y_2 وعليه فإن:
مقدار التغير في $x = \Delta x = x_2 - x_1$ (ويفراد لثا x)
مقدار التغير في $y = \Delta y = y_2 - y_1$ (ويفراد لثا y)



ويعتبار (x_1, y_1) و (x_2, y_2)

نقطة على منحنى الدالة d

فإن لكل تغير في إحداثياتها السينية من

x_1 إلى $x_2 = x_1 + \Delta x$

بحيث $x_1 \in [a, b]$ و $x_2 \in [a, b]$

يحدث تغير منظر في أحد ثبها الصادي يعبر بالعدالة

ت (د) - د (س + د) - د (س) وتسمى الدالة بـ دالة التغير في د عند س = س

والعدالة كلا الرمزين Δ س أو د يمثلان التغير في س

مثال

إذا كانت د (س) = ٣ س + ٢ - س وتغيرت س من ٢ إلى ٢ + د فابعد دالة التغيرت ثم أوجد ، مقدار التغير في د عندما د = ٣ ، ١

٢ ت (١١١)

الحل

∴ د (س) = ٣ س + ٢ - س س تتغير من ٢ إلى ٢ + د

∴ س = ٢ ، ٢ = د (٢) = ٢ - ٢ + ٢ × ٣ = ١٢ ويكون

د (٢ + د) = (٢ + د) ٣ = (٢ + د) ٢ + (٢ + د) - (٢ + د) = ٢ - د + ٢ + ٢ × ٣ + د ١٢ + ١٢ = ٢ - د + ٢ + ٢ × ٣ + د ١٢ + ١٢ =

١٢ + د ١٢ + ٢ × ٣ + د ١٢ + ١٢ =

ت (د) = د (٢ + د) - د (٢) = (٢ + د) ٣ - (٢) ٣ = (٢ + د) ٣ - (٢) ٣ = ١٢ + د ١٢ + ٢ × ٣ + د ١٢ + ١٢ =

١ عندما د = ٣ ، ١

ت (١٢) = (١٢) ٣ = (١٢) ٢ + (١٢) - (١٢) = ١٢ × ٣ + ١٢ - ١٢ = ١٢

٢ ت (١١) أي إيجاد التغير عندما د = ١ ، ١

∴ ت (١١) = (١١) ٣ = (١١) ٢ + (١١) - (١١) = ١١ × ٣ + ١١ - ١١ = ١١

ملاحظة هامة للتغير

بقسمة دالة التغيرت على د حيث د ≠ ٠ ، نحصل على دالة جديدة م تسمى دالة المتوسط التغير في د عند س = س ، حيث د

$$م (د) = \frac{ت (د)}{د} = \frac{د (س + د) - د (س)}{د}$$

$$أو م (د) = \frac{د (س + د) - د (س)}{س - س} = \frac{\Delta س}{\Delta س}$$

أو أنه يمكن إيجاد دالة التغير ثم قسمها على د أو توجد $\frac{\Delta س}{\Delta س}$

مثال

إذا كان $d = (س) = س^2 + 3س$ فأوجد :

- ① دالة متوسط التغير هي د عندما $س = ١$
- ② متوسط التغير هي د عندما تتغير $س$ من ٢ إلى ٣

الحل

$$d = (س) = س^2 + 3س$$

$$\text{عندما } س = ١$$

$$\therefore d = (س) = س^2 + 3س$$

$$\text{عندما } س = ٢$$

$$\therefore d = (س) = س^2 + 3س = (٢ + ١)س^2 + 3(٢ + ١)س$$

$$d = (س + ١) = س^2 + ٦س + ٢ + ٣س = س^2 + ٩س + ٢$$

دالة التغير

$$ت(س) = d = (س + ١) - d = (س) - (س + ١)$$

$$= س^2 + ٦س + ٢ - (س^2 + ٩س + ٢) = س^2 + ٦س + ٢ - س^2 - ٩س - ٢ = -٣س$$

$$ت(س) = -٣س = -٣(٢ + ١) = -٩ - ٣ = -١٢$$

① دالة متوسط التغير

$$\frac{ت(س) - ت(س + ١)}{س - (س + ١)} = \frac{ت(س) - ت(س + ١)}{س - س - ١} = \frac{ت(س) - ت(س + ١)}{-١}$$

$$= \frac{-١٢ - (-١٢)}{-١} = \frac{-١٢ + ١٢}{-١} = \frac{٠}{-١} = ٠$$

$$\text{② عندما تتغير } س \text{ من ٢ إلى ٣} \quad \therefore س = ٣, ٢ = ٣ - ٢ = ١$$

$$\therefore \text{متوسط التغير} = ٣ \times ١ + (٣ - ١) = ٤$$

وبممكن إيجاد متوسط التغير في د عندما تتغير $س$ من ٣ إلى ٤

بأن نوجد د ، ٣ ، د (٢) ثم نوجد المتوسط كما يلي :

$$\text{عندما تتغير } س \text{ من ٣ إلى ٤ فإن } س = ٤, ٣ = ٤ - ٣ = ١$$

$$\text{وبكون } د(٣) = ٩ + ٩ = ١٨, د(٤) = ١٦ + ١٢ = ٢٨$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{د(س) - د(س + ١)}{س - س - ١} = \frac{٢٨ - ١٨}{٣ - ٢} = \frac{١٠}{١} = ١٠$$

إذا كانت د: $a, b \rightarrow c$ حيث $c = d(s)$ ، $s, s_1, s_2 \in [a, b]$

وكان متوسط التغير $m(s)$ نهاية عندما $s \rightarrow a$ فإننا نحصل بهذه النهاية على دالة جديدة تسمى بمعدل تغير الدالة عند النقطة s حيث،

$$\text{معدل التغير في } d \text{ عند } s = \lim_{s_1 \rightarrow s} \frac{d(s_1) - d(s)}{s_1 - s} = m(s)$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة

ملخص لبعض القوانين

المربع

محيط المربع = طول الضلع $\times 4$ $\Rightarrow d(s) = 4s$
مساحة المربع = طول الضلع \times نفسه $\Rightarrow d(s) = s^2$
حيث s طول ضلع المربع

المستطيل

محيط المستطيل = (الطول + العرض) $\times 2$
مساحة المستطيل = الطول \times العرض

المكعب

المساحة الجانبية = $4 \times$ مربع طول حرفه $\Rightarrow d(s) = 4s^2$
المساحة الكلية = $6 \times$ مربع طول حرفه $\Rightarrow d(s) = 6s^2$
الحجم = مكعب طول حرفه $\Rightarrow d(s) = s^3$
حيث s طول حرف المكعب

الدائرة

محيط لدائرة = $2\pi r$ لو $d = (2r)$ $\pi d = 2\pi r$

مساحة الدائرة = πr^2 لو $d = (2r)$ $\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi r^2$

حيث r طول نصف قطر الدائرة

الكرة

مساحة سطح الكرة = $4\pi r^2$ لو $d = (2r)$ $4\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 4\pi r^2$

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi r^3$ لو $d = (2r)$ $\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$

حيث r طول نصف قطر الكرة

مثال

إذا كانت $d = (2r)$ $3 - r^2 + 2r = 3 - r^2 + 2r$ فأوجد متوسط التغير عندما تتغير r من 3 إلى 3.2 ثم أحسب معدل تغير الدالة d عندما $r = 3$

الحل

$$d = (2r) = 3 - r^2 + 2r = 3 - 9 + 6 = 0$$

$$d = (2r) = 3 - (3.2)^2 + 2(3.2) = 3 - 10.24 + 6.4 = -0.84$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{d(3.2) - d(3)}{3.2 - 3} = \frac{-0.84 - 0}{0.2} = -4.2$$

$$d = (2r) = 3 - (h + 3)^2 + 2(h + 3) = 3 - (h^2 + 6h + 9) + 2h + 6 = 3 - h^2 - 6h - 9 + 2h + 6 = -h^2 - 4h$$

$$12 + 8h + h^2 = 3 - h^2 - 4h + 6 + 2h + 6 = 12 - h^2 - 2h$$

$$h + 8 = \frac{12 - 12 + 8h + h^2}{h} = \frac{d(3.2) - d(3)}{h} = -4.2$$

$$\therefore \text{معدل التغير} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(3.2) - d(3)}{h} = -4.2$$

مثال

(إذا كانت $y = \frac{2}{1-x}$ حيث x هو y ، فأوجد :

- ① دالة متوسط التغير في y عندما تتغير x من 1 إلى 2 ، و
وأوجد هذا المتوسط عندما تتغير x من 2 إلى 2.5
- ② معدل التغير في y عندما $x = 3$

∴ $(y) = (x) = (2) = (2.5) = (3)$

① ∴ $y = \frac{2}{1-x}$

$= \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-y} \quad (\text{بتوحيد المقامات})$

$= \frac{2(1-y) - 2(1-x)}{(1-x)(1-y)} = \frac{2-2y-2+2x}{(1-x)(1-y)} = \frac{2x-2y}{(1-x)(1-y)}$

$\frac{2x-2y}{(1-x)(1-y)} \times \frac{1}{x-y} = \frac{(x) = (2)}{x-y} = (2)$

$\frac{2}{(1-x)(1-y)} = (2)$

عندما تتغير x من 2 إلى 2.5 تكون $x = 2$ ، $y = 2.5 - 2 = 0.5$

∴ $\frac{1}{3} - \frac{2}{1 \times 1.5} = \frac{2}{(1-2)(1-0.5+2)} = (2)$

② معدل التغير = $\frac{1}{x-y} = (2)$ $\frac{2}{(1-x)(1-y)}$

$\frac{2}{(1-x)(1-y)} =$

عندما $x = 3$ يكون معدل التغير $\frac{1}{3} - \frac{2}{1 \times 2} =$

مثال

احسب معدل تغير الدالة $d(s) = \sqrt{s+8}$ عندما $s=1$

الحل

$$d(s) = \sqrt{s+8}$$

مجال $d = [-8, \infty)$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow d(1) = \sqrt{1+8} = 3$$

$$d(s) = \sqrt{s+8} \Rightarrow d(1) = 3, d(2) = \sqrt{2+8} = 3$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 3}{1} = 0$$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow d(1) = 3, d(1.5) = \sqrt{1.5+8} = 3.041$$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow d(1) = 3, d(1.01) = \sqrt{1.01+8} = 3.00166$$

$$\text{عندما } s=1 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

لاحظ: لا يمكن إيجاد معدل تغير الدالة عند $s=-8$ لأن النهاية تكون غير موجودة عندها

حل آخر عندما $s=1$

$$d(s) = \sqrt{s+8} \Rightarrow d(1) = 3, d(1.5) = 3.041$$

معدل التغير هو d

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2}$$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

مثال

أوجد دالة متوسط التغير في d حيث $d = (s)$ عندما تتغير s من s_1 إلى $s_2 + h$ ثم استنتج معدل التغير في d عند $s = 2$

الحل

$$d = (s) = s^2$$

$$\text{عندما } s = s_1$$

$$d = (s_1) = s_1^2$$

$$\text{عندما } s = s_1 + h$$

$$d = (s_1 + h) = (s_1 + h)^2$$

$$\text{دالة متوسط التغير} = \frac{(s_1 + h)^2 - s_1^2}{h} = \frac{(s_1 + h) - s_1}{h} \cdot \frac{(s_1 + h) + s_1}{h} = \frac{2s_1 + h}{h}$$

$$\text{دالة معدل التغير} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s_1 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s_1 + h}{h} = \frac{2s_1}{h} = \frac{2s_1}{1} = 2s_1$$

$$\text{عندما } s = 2 \Rightarrow \text{معدل التغير في } d = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore s = 2$$

$$\therefore \text{معدل التغير في } d = 2 \times 2 = 4$$

مثال

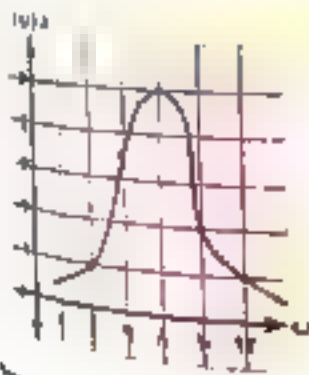
يوضح الشكل المقابل،

المنحنى $y = d(u)$ حيث y جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الجنيهات، u الزمن مقدراً بالشهور. أوجد من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

$$1. u = 4 \text{ إلى } u = 8 \quad 2. u = 8 \text{ إلى } u = 10$$

الحل

$$1. \text{ من الرسم } d(8) = 5 \text{ و } d(4) = 9$$



$$\text{متوسط التغير في } D = \frac{(1)D - (8)D}{1 - 8} = \frac{1 - 8}{1 - 8} = 1 \text{ مليون جنيه / شهر}$$

أي أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار مليون جنيه شهرياً خلال هذه الفترة

$$(2) \text{ من الرسم } D(10) = 2 \text{ و } D(8) = 8$$

$$\text{متوسط التغير في } D = \frac{(8)D - (10)D}{8 - 10} = \frac{8 - 10}{8 - 10} = -1 \text{ مليون جنيه / شهر}$$

أي أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار 1 مليون جنيه شهرياً خلال هذه الفترة

مثال

صفيحة من المعدن على شكل دائرة تتعرض للحرارة فتتمدد بانتظام محتفظة بشكلها
أوجد معدل التغير في مساحة سطح الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما
يكون طول نصف قطرها 14 ($\frac{22}{7} \approx \pi$)

الحل

بفرض أن طول نصف القطر = r ، مساحة الصفيحة = πr^2

$$\therefore D(\pi r^2) = 2\pi r$$

$$2\pi r = \frac{D(\pi r^2) - (\pi r^2)}{D} = \frac{D(\pi r^2) - (\pi r^2)}{D}$$

$$\frac{[2\pi r - \pi r^2] \pi}{D} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D} =$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D} \text{ ، } \pi = 14 \text{ ، } r = 14 \text{ ، } D = 2 \times \pi r$$

عندما يكون طول نصف القطر = 14

$$\therefore \text{معدل التغير} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D} = \frac{2\pi \times 14 - \pi \times 14^2}{2 \times \pi \times 14} = 14$$

راجع معنا واحترم نفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق في صورة اختيار تراكمي على ما سبق دراسته يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تذكر ما درست بإستقرار ولا نسيان ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعززك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

مسائل المستوى الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

١) قيمة دالة التغير للدالة $(س) = ٢س + ١$ إذا تغيرت $س$ من ٣ إلى ٤ يساوي

[أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤]

٢) قيمة دالة التغير للدالة $(س) = ٢س + ١$ إذا كان التغير في $س = ٢$

عندما $س = ١$ يساوي [أ ٢٢ ب ٤٤ ج ٤١ د ٢٢]

٣) قيمة دالة التغير للدالة $(س) = ٢س + ١$ عندما $س = ٢$

عندما $س = ١$ يساوي [أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤]

٤) إذا كان $(س) = ٢س - ١$ ودالة التغير عندما $س = ٢$ فإن

أولاً $(١٠٠) =$ [أ ١١ ب ١٠١ ج ١١١ د ١١٢]

ثانياً $(١٠٠) =$ [أ ٢٠٥ ب ٢٠٥ ج ٢٠٥ د ٢٠٥]

٥) إذا كانت $(س) = ٢س + ١$ فإن التغير في $س$ عندما

١) تتغير $س$ من ٢ إلى ٢٠١ = [أ ١٦ ب ١٦٦ ج ١٦٦ د ١٦٦]

٢) $س = ٢٠١$ يساوي [أ ١ ب ١ ج ١ د ١]

١ إذا كان $d = (س)$ $س = 3 - 2$ أوجد دالة التعبير ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير $س$ من ٢ إلى ٢.٥ ثم أوجد معدل التغير عندما $س = 2$
[٣٠، ٣٠، ٣٠]

٢ اختر إجابة صحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١ إذا كان $d = (س)$ $س = 3 + 2$ فإن $d = (٠, ٥)$ عندما $س = 2$
[١٠، ٧٥ -] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٢ إذا كان $d = (س)$ $س = 3 - 2$ فإن $d = (٠, ٣)$
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٣ إذا كان متوسط التغير في $d = 2,4$ عندما تتغير $س$ من ٣ إلى ٣.٢ فإن التغير في d يساوي
[١٠، ٣٢] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٤ متوسط تغير الدالة d حيث $d = (س)$ $س = 3 + 2$ عندما تتغير $س$ من ١ إلى ٣ يساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٥ إذا كان متوسط التغير في $d = -1,4$ عندما تتغير $س$ من ٢.٤ إلى ٢ فإن التغير في d يساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

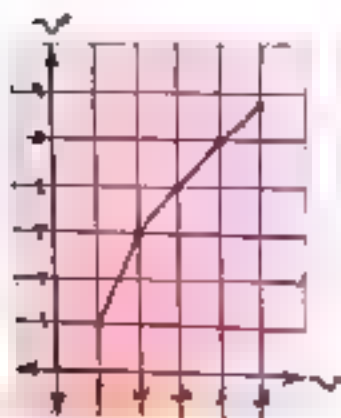
٦ إذا كان متوسط التغير في $d = 5$ عندما تتغير $س$ من ٧ إلى ٤.٤ $d = (٢)$ فإن $d = (٤)$ تساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٧ متوسط التغير في محيط مربع طول ضلعه $س$ يساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٨ متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ إلى ٧ يساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

٩ متوسط التغير في مساحة مربع عندما يتغير طول ضلعه من ٢ إلى ٣ يساوي
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

١٠ يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة d حيث $س = d$ في أي الفترات يكون متوسط التغير في d هو الأكبر
[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]



[١٠، ٦] [٢، ٢٥] [١، ٧٥] [١٦، ٢٥]

مسائل المستوى الثاني

١٢٠ أوجد متوسط التغير للدالة $y = x^2 + 2x$ حيث x يتغير من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عند $x = 2$

[١٢٠]

١٢١ إذا كانت $y = x^3 + 3x^2 + 1$ أوجد دالة متوسط التغير للدالة ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير x من ١ إلى ٣ ثم أوجد معدل التغير عندما $x = 2$

[١٢١]

١٢٢ أوجد متوسط تغير الدالة $y = x^2 + 2x - 3$ عندما تتغير x من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير في هذه الدالة عندما $x = 3$

[١٢٢]

١٢٣ أوجد متوسط تغير الدالة $y = x^3 - 2x$ عندما تتغير x من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل تغيرها عند $x = 2$

[١٢٣]

١٢٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة $y = \frac{1}{x}$ حيث x يتغير من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما $x = \frac{1}{2}$

[١٢٤]

١٢٥ إذا كانت دالة حيث $y = \frac{1}{x} + 1$ فأوجد دالة متوسط التغير للدالة

[١٢٥]

١٢٦ معدل تغير هذه الدالة عند $x = 3$

[١٢٦]

١٢٧ إذا كانت $y = \frac{2}{x-1}$ فأوجد دالة معدل التغير عندما $x = 1$ ثم احسب معدل التغير عندما $x = 3$

[١٢٧]

١٢٨ أوجد دالة متوسط التغير للدالة $y = \frac{1}{x} - x$ عندما تتغير x من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير في الدالة عندما $x = 1$

[١٢٨]

١٢٩ أوجد دالة متوسط التغير في $y = \frac{x+1}{x-1}$ حيث x يتغير من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير عندما $x = 2$

[١٢٩]

١٣٠ أوجد دالة متوسط التغير للدالة $y = x^3 - 3x$ عندما x يتغير من ١ إلى ٣ ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما $x = 2$

[١٣٠]

١٣١ إذا كانت $y = x^2 + 1$ فأوجد دالة التغير في y عندما $x = 1$ وإذا كانت $y = 2$ عندما $x = 1$ فأوجد قيمتي x و y

[١٣١]

١٢١ إذا كانت د (س) = س^١ + س - ٢ فأوجد دالة التغير ت (و) عندما س = ٢

ولذا كانت $\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4}$ فأوجد قيمة ١

[١٤]

١٢٢ إذا كانت المسافة في التي تقطعها حشرة خلال زمن قدره ١ ثانية يعطى بالعلاقة

$$١٠ - ٢٠ = ٢ + ١٠$$

إلى ٤ ثم أحسب معدل التغير في عندما ١ = ٢

[١٤٢]

١٢٣ صفيحة دائرية لشكل عند تصغيرها تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها

أوجد معدل تغير مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٤

[٢٨]

١٢٤ سطح حجر من ماء ساخن فتكون موجة دائرية ترداد بانتظام بحيث يظل

محتفظه بشكلها الدائري أحسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يزداد

طول نصف قطرها من ٣ إلى ٣,١ ثم أوجد معدل التغير عندما يكون طول نصف

قطرها ٣,٥ $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

[٢٢٠ - ٢٢١]

١٢٥ صفيحة مربعة لشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها أوجد دالة

متوسط التغير في مساحة سطح الصفيحة عندما يتغير طول ضلعها من ٣ إلى ٣ + و

ومنه أحسب معدل التغير في المساحة عندما يكون طول الضلع ٨

[١٩]

١٢٦ مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله أحسب متوسط التغير في مساحته

الكلية وذلك عندما يتغير طول حرفه من ٣ إلى ٣,٢ ثم أحسب معدل تغير

مساحته الكلية عندما يكون طول حرفه ٣

[٢٧٠, ٢٧١]

١٢٧ كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي فأوجد معدل التغير في

حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧

[٢٦٠]

١٢٨ قفاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي أحسب متوسط

التغير في مساحة سطحها الكروي عندما يتغير طول نصف قطرها من ٥,٥ إلى ٥,٦

علما بأن مساحة سطح الكرة تساوي $4\pi r^2$ حيث r طول نصف قطر الكرة.

[٢١٠]

١٢٩ إذا كانت الكمية من (مقاسة بالكيلوجرام) التي تبنيها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج

يؤلف على عدد كيلوجرامات من من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة طبقاً للعلاقة:

$$١٠٠ - \frac{47}{١ + س} = ٢$$

[١٧]

٢٦ (٢٤) صحيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوي ضعف ارتفاعها الماظر لتمدد بالحرارة محافظة على شكلها أحسب متوسط التغير في مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ إلى ٨.٥

٢٧ (٢٥) مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله وينقص النسبة بين أبعاده، أحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون عرضه ٥ وأحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يتغير طوله من ١٠ إلى ١١

٢٨ آخر، إجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت $d = f(s)$ فإن معدل تغير الدالة d عندما $s = ١$ يساوي
[١) ١٥) ١٠) ١٢) ١٥]

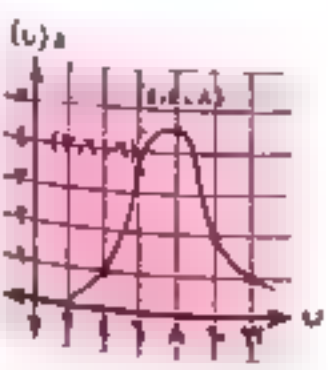
٢ إذا كانت $d = f(s)$ فإن معدل تغير الدالة d عندما $s = \frac{\pi}{4}$ يساوي
[١) ١) ١) ١) ١]

٣ إذا كانت $d = f(s)$ فإن معدل تغير الدالة d عندما $s = \frac{\pi}{4}$ يساوي
[١) ١) ١) ١) ١]

٤ إذا كانت $d = f(s)$ فإن $\frac{d}{ds} f(s) = \frac{d}{ds} (s + s) - \frac{d}{ds} (s)$ يساوي
[١) ١) ١) ١) ١]

٥ إذا كانت $d = f(s)$ فإن $\frac{1}{s} = \frac{d}{ds} f(s) = \frac{d}{ds} (s + s) - \frac{d}{ds} (s)$ يساوي
[١) ١) ١) ١) ١]

٦ $\frac{d}{ds} f(s) = \frac{d}{ds} (s + s) - \frac{d}{ds} (s)$ يساوي
[١) ١) ١) ١) ١]



٧ (٢٦) يوضح الشكل المقابل المنحنى $v = f(u)$ حيث v جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحنيهات، و u الزمن مقدراً بالشهور. من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

أولاً $u = 8$ إلى $u = 8$ يساوي

$$[-8, 8] \quad [-8, 8] \quad [-8, 8] \quad [-8, 8]$$

ثانياً $u = 8$ إلى $u = 10$ يساوي

$$[-12, 12] \quad [-12, 12] \quad [-12, 12] \quad [-12, 12]$$

ثالثاً $u = 4$ إلى $u = 12$ يساوي [صفر إلى 1] $[-12, 12]$

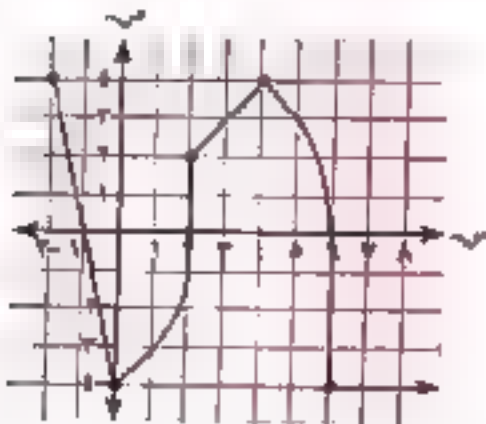
$$⑧ \text{ إذا كانت الدالة } d(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s > 2 \\ 3 - s & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases} \text{ فإن:}$$

أولاً متوسط تغير الدالة عندما يتغير s من 2 إلى 12 يساوي

$$[1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1]$$

ثانياً معدل تغير الدالة عندما $s = 1$ يساوي

$$[1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1]$$



مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

في الشكل المقابل ،

منحني الدالة d حيث $s = d(s)$
حدد الفترات التي يكون فيها متوسط
التغير في d ثابتاً وفسر إجابتك

صفحة رقيقة على شكل مثلث متساوي الأضلاع لتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة

بشكلها. أوجد متوسط التغير في مساحة الصفحة عندما يتغير طول ضلعها من ١٥ سم

إلى ٢٥ سم (٣٦)

مثلث متساوي الأضلاع أحسب متوسط تغير مساحة سطحه عندما يتغير طول ضلعها

من ٨ سم إلى ١٠ سم $\left[\frac{3}{4}\right]$

صفحة من المعدن على شكل مربع تتعرض للحرارة فتتمدد محتفظة بشكلها أحسب

التغير في طول ضلعها عندما تتغير المساحة بمقدار ٩ سم² بدءاً من اللحظة التي يكون

فيها طول الضلع ٤ سم (٣٧)



الإشتقاق

الحد الثاني

٢

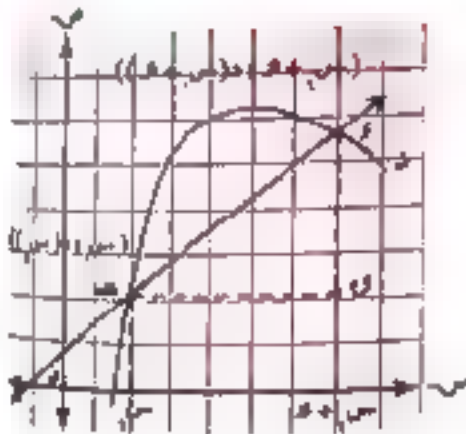
في الشكل المقابل،

منحنى d : $[a, b]$ حيث $s = d(s)$ ،

وهو قاطعاً له في النقطتين $s_1, d(s_1)$ و $s_2, d(s_2)$

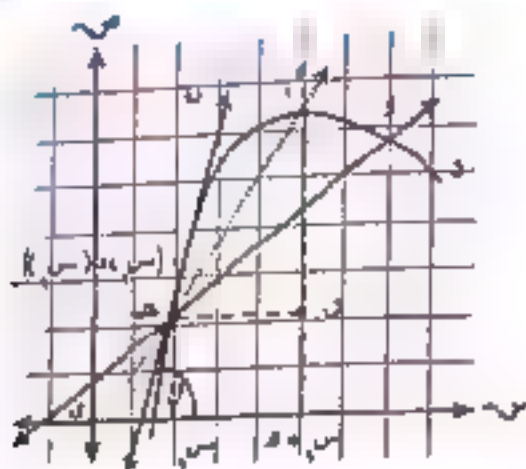
و $s_2 = s_1 + h$ و $d(s_2) = d(s_1 + h)$

فإن ميل $\overrightarrow{cd} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$



$$\frac{d(s_2) - d(s_1)}{s_2 - s_1} = \frac{d(s_1 + h) - d(s_1)}{s_1 + h - s_1} =$$

ويكون ميل القاطع $\overrightarrow{cd} = \frac{d(s_2) - d(s_1)}{h} = \frac{d(s_1 + h) - d(s_1)}{h}$ و $m(s)$ (دالة متوسط التغير)



إذا كانت النقطة $(s, d(s))$ نقطة ثابتة على منحنى الدالة وتحركت النقطة s على المنحنى بحيث تقترب من النقطة s ليأخذ h الوضع $h \rightarrow 0$ ويصبح مماساً للمنحنى عند s أي أن $h \rightarrow 0$ صفر فإن ميل المماس عند s = $\frac{d(s) - d(s-h)}{h}$ إن وجدت

أي أن ميل المماس لمنحنى الدالة d حيث $s = d(s)$ عند النقطة $(s, d(s))$ يساوي معدل التغير في d عند $s = s$

المشتقة الأولى

لكل قيمة للمتغير s في مجال d يباظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير في d وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضاً في المتغير s يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلي الأول» ويمكن تعريفها كما يلي

تعريف

إذا كانت $d: [a, b] \rightarrow [c, e]$ فليكن

$$\frac{d(s) - d(s-h)}{h} = d'(s) \quad \text{الدالة المشتقة } d' = d'(s)$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

رموز المشتقة الأولى

إذا كانت $s = d$ (س) فيرمز للمشتقة الأولى للدالة d بأحد الرموز

ونقرأ «مشتقة s » أو «مشتقة d »

من d'

ونقرأ «دال s دال s » أو «مشتقة s بالنسبة إلى s »

$\frac{d}{ds}$

مثال

ميل المماس لمنحنى $D = (S)$ عند النقطة $(S_1, D(S_1))$ هو $D'(S_1)$

فمثلاً

لإيجاد الدالة المشتقة للدالة D أو ميل المماس لمنحنى الدالة D حيث $D = (S)$ $S_1 = 1$ عند النقطة $(1, D(1))$ فإن ميل المماس عند $(S_1 = 1) =$ المشتقة الأولى للدالة عند $(S_1 = 1)$

$$= \text{معدل التغير في } D \text{ عند } (S_1 = 1) = \frac{D(S_1 + 1) - D(S_1)}{1 - S_1}$$

$$= \frac{D(1 + 1) - D(1)}{1 - 1} = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

$$= \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1} = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

مثال

أوجد الدالة المشتقة للدالة D حيث $D = (S)$ $S_1 = 1$ $S_2 = 2$ $S_3 = 3$ مستخدماً تعريف المشتقة ثم اوجد ميل المماس لمنحنى D عند النقطة $(1, D(1))$

الحل

$$D = (S) \Rightarrow S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3$$

$$D(S_1 + 1) = D(1 + 1) = D(2)$$

$$D(S_1 + 2) = D(1 + 2) = D(3)$$

$$D(S_1 + 3) = D(1 + 3) = D(4)$$

$$D(S_1 + 4) = D(1 + 4) = D(5)$$

$$D(S_1 + 5) = D(1 + 5) = D(6)$$

$$D'(S_1) = \frac{D(S_1 + 1) - D(S_1)}{1 - S_1}$$

$$D'(S_1) = \frac{D(S_1 + 1) - D(S_1)}{1 - S_1} = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

$$D'(S_1) = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

$$D'(S_1) = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

∴ النقطة $(1, D(1))$ تقع على المنحنى D

$$∴ \text{ ميل المماس عند النقطة } (1, D(1)) = D'(S_1) = \frac{D(2) - D(1)}{1 - 1}$$

مثال

أوجد مستخدماً التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

$$\textcircled{1} \quad d(س) = \sqrt{3-س} \quad \textcircled{2} \quad d(س) = \frac{1}{س+2}$$

الحل

$$\textcircled{1} \quad d(س) = \sqrt{3-س} \quad \therefore d(س+2) = \sqrt{3-س+2}$$

$$d(س+2) - d(س) = \sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}$$

$$\therefore d'(س) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(س+2) - d(س)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h}$$

$$\therefore d'(س) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} \times \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} \quad (\text{المرافق})$$

$$= \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} = \frac{1}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} = \frac{1}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} =$$

$$\therefore d'(س) = \frac{1}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س}} \quad \frac{1}{4} < س$$

$$\textcircled{2} \quad d(س) = \frac{1}{س+2} \quad \therefore d(س+2) = \frac{1}{س+2+2} = \frac{1}{س+4}$$

$$\therefore d(س+2) = \frac{1}{س+4}$$

$$\therefore d(س) = \frac{1}{س+2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+s} - \frac{1}{2+s+s} &= (s) \cdot d - (s+s) \cdot d \\ \frac{s}{(2+s)(2+s+s)} &= \frac{s - s - s - 2 + s}{(2+s)(2+s+s)} = \\ &= \frac{(s) \cdot d - (s+s) \cdot d}{s} \\ \therefore d'(s) &= \frac{(s) \cdot d - (s+s) \cdot d}{s} \\ \therefore d'(s) &= \frac{s}{(2+s)(2+s+s)} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{(2+s)(2+s+s)} \\ &= \frac{1}{(2+s)(2+s+s)} \\ \therefore d'(s) &= \frac{1}{(2+s)(2+s+s)} \end{aligned}$$

مثال ٣

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة حيث $d = s + 1$ عند النقطة (١) (٢٤١)
ثم أوجد قياس الزاوية الموجهة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات عند النقطة (١) (٢٤١)

الحل

$$\begin{aligned} d &= s + 1 = (1) \quad d = 1 + 1 = (2) \\ \therefore \text{النقطة } (1) \text{ (٢٤١) } &\exists \text{ للمنحنى } d \\ \text{ميل المماس عند } (s=1) &= \text{معدل التغير في } d \text{ عند } (s=1) \\ &= \frac{d - (d+1)}{s} \\ \therefore \text{ميل المماس} &= \frac{d - [1 + (d+1)]}{s} \\ &= \frac{1 - (d+1)}{s} \\ &= \frac{1 - 2 - (d+1)}{1} \\ &= \frac{-1 - (d+1)}{1} \\ &= \frac{-1 - 2 - 1}{1} = \frac{-4}{1} = -4 \\ \therefore \text{زاوية } \theta &= \arctan(-4) \end{aligned}$$

$\therefore \theta = \arctan(-4)$

$$\therefore \theta = \arctan(-4) = \arctan(-4)$$

مثال

إذا كان $d = f(s) = 2 - 3s$ حيث f ثابت أوجد .

① المشتقة الأولى للدالة d عند أي نقطة (s, d)

② قيمة f إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند $s = 1$ يساوي 9

الحل

$$① \because d = f(s) = 2 - 3s \quad \therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$② \because \text{ميل المماس} = d' = -3 = 9 \quad \text{عندما } s = 1$$

$$\therefore f(1) = 2 - 3(1) = -1$$

$$\therefore f(1) = -1$$

$$\therefore f(1) = -1$$

مثال

إذا كان $d = f(s) = 2 + 3s$ حيث f ثابت أوجد .

① المشتقة الأولى للدالة d عند أي نقطة (s, d)

② قيمتي f ، s إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(-1, -2)$

الواقعة عليه يساوي 1

الحل

$$\therefore d = f(s) = 2 + 3s$$

$$\begin{aligned} \therefore d(s+h) &= (s+h)^2 + b(s+h) \\ &= s^2 + 2sh + h^2 + bs + bh \\ d(s+h) - d(s) &= (s+h)^2 + b(s+h) - s^2 - bs \\ &= 2sh + h^2 + bh \end{aligned}$$

$$\therefore d'(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2sh + h^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2s + h + b)$$

إذا كان ميل المماس $d'(s) = 1$ عند $s = 1$

$$b + 1 - 1 = 1$$

$$\textcircled{1} \quad b + 1 - 1 = 1$$

$$\therefore d(1) = 1 - 1 = 0 \quad \therefore d(1) = 0$$

$$d(s) = s^2 + bs + 1$$

$$1 = 1 - 1 + b + 1$$

$$\textcircled{2} \quad 1 = 1 - 1 + b + 1$$

من ①، ② بالجمع

$$1 - 1 = 1 - 1 + b + 1$$

بالتعويض في ①

$$1 = 1 - 1 + b + 1$$

$$\therefore b + 1 = 1$$

$$b = 0$$

$$1 = 1 - 1 + b + 1$$

$$\therefore b = 0$$

⑤ طريقة أخرى لإشتقاق $\sin x$

يقال أن الدالة d قابلة للإشتقاق عند $s = 1$ (حيث d تنتمي إلى مجال الدالة)

$$\text{إذا وضعنا } d(1) = 1 \text{ لها وجود حيث } d'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{h}$$

وإذا وجدت مشتقة للدالة d عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة $[a, b]$ ، و نقول أن الدالة d قابلة للإشتقاق في هذه الفترة ولذلك فإن الدالة d كثيرة الحدود تكون قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

3. المشتقة اليمينية والمشتقة اليسرى

إذا كانت الدالة D معرفة عند $s = a$ (حيث a تنتمي إلى مجال الدالة) وكانت قاعدة الدالة على يمين a تختلف عن قاعدتها على يسار a فتبحث عن قابلية الاشتقاق عند $s = a$ بأن نوجد المشتقة اليمينية للدالة ويرمز لها بـ $(D^+)_a$ والمشتقة اليسرى ويرمز لها بـ $(D^-)_a$ حيث:

$$(D^+)_a = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D(a+h) - D(a)}{h}$$

$$(D^-)_a = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{D(a+h) - D(a)}{h}$$

وتكون الدالة D قابلة للاشتقاق عند a إذا فقط إذا كان $(D^+)_a = (D^-)_a$ ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز $D'(a)$

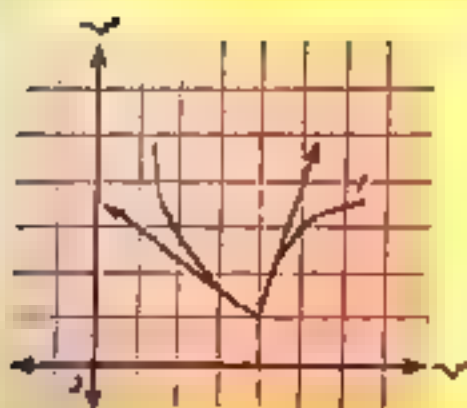
4. الاشتقاق والتصلب

تعريف

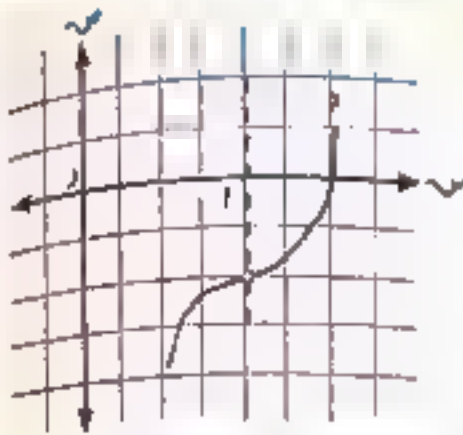
إذا كانت الدالة D حيث $s = a$ (س) قابلة للاشتقاق عند $s = a$ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

ملاحظة

1. اتصال دالة عند نقطة لا يعني بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.
فمثلاً



الدالة f متصلة عند a
ولكن ميل المماس الأول (المشتقة اليمينية) \neq ميل المماس الثاني (المشتقة اليسرى)
 \therefore الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $s = a$



٢٢ إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = 1$

فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

فمثلاً

الدالة f غير متصلة عند $x = 1$

لأن الدالة غير معرفة عند $x = 1$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

٢٣ عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة في مجالها يفضل بحث إتصالها عند هذه النقطة أولاً.

فإذا كانت f متصلة نبحث الاشتقاق.

فإذا كانت f غير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق.

مثال

اثبت أن $f(x) = x^2 - x + 3$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

الحل

∴ مجال $f = \mathbb{R}$

∴ f د (س) كثيرة حدود

$$f(1) = 1^2 - 1 + 3 = 3$$

∴ f د معرفة عند $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - (1) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2 + h) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$$

∴ f د قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

مثال

أثبت أن د (س) = $\frac{1}{2-s}$ قابلة للإشتقاق عند س = 4

الحل

لايجاد مجال الدالة نضع مقام = 0

$$\therefore 2-s=0 \quad \therefore s=2 \quad \therefore \text{مجال د} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\therefore \text{د معرفة عند س} = 4$$

$$\therefore \text{د (4)} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{د (4)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{د (4)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

\therefore د قابلة للإشتقاق عند س = 4

مثال

أثبت قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = 1 حيث

$$\text{د (س)} = \begin{cases} 3+s & \text{عندما س} \leq 1 \\ 2-s & \text{عندما س} > 1 \end{cases}$$

الحل

$$\therefore \text{الدالة معرفة عند س} = 1$$

$$\therefore \text{مجال د} = \mathbb{R}$$

$$\therefore \text{د (1)} = 3+1 = 4$$

$$\text{المشتقة اليمنى} = \text{د (1)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1 \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d - (d+1)}{d} \right) = d'(-1) =$$

$$= \frac{d - [(d+1) - 1]}{d} =$$

$$= \frac{d - [d + 1 - 1]}{d} = \frac{d - d}{d} =$$

$$= \frac{0}{d} = 0$$

∴ النهاية غير موجودة ∴ المشتقة اليسرى غير موجودة

∴ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند $s = 1$

مثال

أبحث قابلية الإشتقاق للدالة د عند $s = 2$ حيث

$$d(s) = \begin{cases} 4 - s & \text{عندما } s \leq 2 \\ s - 2 & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

الحل

∴ مجال د = \mathbb{R}

∴ الدالة معرفة عند $s = 2$

$$d(2) = 4 - 2 \times 2 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d - (d+2)}{d} \right) = d'(+2) =$$

$$= \frac{d - [(d+2) - 2]}{d} =$$

$$= \frac{d - [d + 2 - 2]}{d} = \frac{d - d}{d} =$$

$$= \frac{0}{d} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d - (d+2)}{d} \right) = d'(-2) =$$

$$= \frac{d - [(d+2) - 2]}{d} =$$

مثال ١١

أبحث قابلية اشتقاق الدالة D حيث:

$$D(s) = \begin{cases} s^3 + 2 & \text{عندما } s \leq 1 \\ s^2 - 1 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

الحل

$$D(1) = 1^3 + 2 = 3$$

$$\text{النهاية اليمنى} = D(1^+) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (s^3 + 2) = 3$$

$$\text{النهاية اليسرى} = D(1^-) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (s^2 - 1) = 0$$

$$D(1^-) \neq D(1^+) \neq D(1)$$

\therefore الدالة غير متصلة عند $s = 1$

\therefore الدالة D غير قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

مثال ١٢

$$D(s) = \begin{cases} s^2 - 1 & \text{عندما } s < 1 \\ 2 - s & \text{عندما } s \geq 1 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق عند $s = 1$ فأوجد قيمة D

الحل

\therefore الدالة D قابلة للاشتقاق عند $s = 1$

\therefore الدالة D متصلة عند $s = 1$

\therefore النهاية اليمنى للدالة $D =$ النهاية اليسرى للدالة D

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 1^-} (s^2 - 1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (2 - s)$$

$$1^2 - 1 = 2 - 1$$

$$0 = 1 \quad \text{صفر} = 1 - 1 = 2 - 1$$

$$1 = 1$$

الصفحة ٤٤٣

اسألني عنها
عندما نلتق
بمعلمة

راجع معنا واختر لنفسك

اختبار اركمى

١٠



١) أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١) إذا كان متوسط التغير في د = ١,٢ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣ فإن التغير في د يساوي [١,٢ | ٣,٦ | ٣,٦ | ٣٩]
- ٢) إذا كان متوسط التغير في د = ٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٤,٣ د (١) = ٦ فإن د (٣) = [٤ | ٧ | ٨ | ١٤]
- ٣) متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٤ إلى ٦ يساوي [١٥٢ | ٧٦ | ٣٨ | ١٩]
- ٤) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^٢ + ٢ س عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوي [صفر | ١٢ | ١٥ | ٦]

٥) أوجد معدل تغير الدالة د حيث د (س) = س + $\frac{1}{س}$ عند س = ٢

٦) إذا كانت د (س) = س^٢ - س + ١ فأوجد دالة التغير عند س = ٣ ثم احسب د (-٣,٠)

مسائل المستوى الأول

أكثر إجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ ميل المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$ يساوي معدل التغير في y عند $x = a$

٢ المشتقة الأولى لدالة $y = f(x)$ عند $x = a$ تساوي معدل التغير في y عند $x = a$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ و } \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$\frac{f(a) - f(a-h)}{h} \text{ و } \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

٣ مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$ تساوي معدل التغير في y عند $x = a$

$$[2, -1, 1, 2]$$

٤ مشتقة الدالة $y = f(x)$ عند $x = a$ تساوي معدل التغير في y عند $x = a$

$$[2, -1, 1, 2]$$

٥ الدالة $y = f(x)$ تكون قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت

٦ إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإنها تكون

٧ إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإنها تكون

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$$

٨ إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإن

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$$

٩ إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإن

$$[2, -1, 1, 2]$$

① إذا كانت الدالة د حيث د:

$$D(s) = \begin{cases} s^2 + s - 6 & \text{عندما } s \leq 2 \\ s^2 + 2s & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند $s = 2$ فإن $2 - 1 = 1 = \dots$

[1- د 3 د 10- د 10]

② أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث $D(s) = s^2 - s + 1$ استخدمنا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة $(-2, 7)$

[10-]

③ أوجد مشتقة الدالة د حيث $D(s) = s^3 + 4$ ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(-1, 3)$ الواقعة عليه.

[3-]

④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

$$① \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \geq 1 \\ s^2 + 2 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند $s = 1$ فإن $1 = \dots$ [1 د 2 د 3 د 4]

$$② \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \leq 1 \\ s^2 - 3 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند $s = 1$ فإن $1 = \dots$ [1 د 2 د 3 د 4]

$$③ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s - 1 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s^2 - 3 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

حيث $1, 2$ ثابتان فإذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند $s = 2$

فإن $2 - 1 = 1 = \dots$ [1 د 2 د 3 د 4]

$$④ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s + 1 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند $s = 2$ فإن $2 + 1 = 3 = \dots$ [4 د 1- د 8 د 8-]

$$⑤ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند $s = 2$ فإن $2' (2) = \dots$ [1 د 2 د 1 د 8]

مسائل المستوى الثاني

١٠) إذا كانت د (س) = $3س^2 + 4س + ٧$ أوجد مشتقة الدالة باستخدام تعريف

المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى د عند النقطة (١-١)

١١) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = $س^2 - ٥س$ عند $س = ٣$

وبين المعنى الهندسي لمشتقة الدالة عند $س = ٢$

١٢) أوجد باستخدام تعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = $س^2 + ٣$ عند $س = ١$ ثم

أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب درجة.

١٣) أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة د حيث د (س) = $١ - ٥س - ٣س^2$ عند

النقطة (١-٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات لأقرب درجة.

١٤) أوجد مستخدماً التعريف الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| ١) د (س) = $س^2 + ٣$ | ٢) د (س) = $س^2 - ٣س + ٤$ |
| ٣) د (س) = $س^2 + ٣س + ١$ | ٤) د (س) = $\frac{١}{س}$ |
| ٥) د (س) = $\frac{١}{س^2}$ | ٦) د (س) = $\frac{س}{١ + س}$ |
| ٧) د (س) = $س^3 + ٤$ | ٨) د (س) = $\sqrt{س}$ |

١٥) أوجد المشتقة الأولى للدالة د في كل مما يأتي وعين قيم س التي تكون عندها الدالة

غير قابلة للاشتقاق:

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| ١) د (س) = $\frac{١}{س}$ | ٢) د (س) = $\frac{٣}{س - ٥}$ |
| ٣) د (س) = $\frac{١}{س^2 + ٣}$ | ٤) د (س) = $\sqrt{١ - س}$ |

16 أبحث قابلية الاشتقاق لكل من السؤال الآتية عند النقط المعطاة:

1 د (س) = س² - س + 1 عند س = 1

2 د (س) = س² - 4 عند س = صفر

3 د (س) = $\frac{1-س}{1+س}$ عند س = 2

4 د (س) = $\sqrt{1-س}$ عند س = 1 عند س = 0

17 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د

د (س) = $\begin{cases} 5 - س^2 & \text{عندما } س \geq 2 \\ 3 - س^2 & \text{عندما } س < 2 \end{cases}$ عند س = 2

18 إذا كان د (س) = $\begin{cases} |س - 2| & \text{عندما } س \leq 2 \\ 4 - س^2 & \text{عندما } س > 2 \end{cases}$

فأبحث قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = 2

19 أبحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د عند س = 1 حيث د

د (س) = $\begin{cases} س^2 + 2 & \text{عندما } س \geq 1 \\ س + 2 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

20 أبحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = 1 حيث د

د (س) = $\begin{cases} س^3 + 4س - 3 & \text{عندما } س > 1 \\ 3س^3 - 12س + 11 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

21 أبحث قابلية الاشتقاق الدالة د عند س = 1 حيث د

د (س) = $\begin{cases} 4 - س^2 & \text{عندما } س \geq 1 \\ 2س + 1 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

22 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = |س - 2| عند س = 2

23 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = |س| عند س = 1

24 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = (س - 4)|س| عند س = 1

13) أوجد قيمة الثابت m إذا كانت الدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 1 + s^2 & \text{عندما } s \leq 2 \\ 2 - s & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

متصلة عند $s = 2$ ثم أبحث قابلية الاشتقاق للدالة عند $s = 2$

[1]

14) إذا كانت الدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 1 + s & \text{عندما } s \geq 1 \\ 1 - s^2 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

متصلة عند $s = 1$ فأوجد قيمة الثابت m ثم أبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند $s = 1$

[2]

15) إذا كانت الدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ 1 + s & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

متصلة عند $s = 0$ فأوجد قيمة الثابت m ثم أبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند $s = 0$

[3]

16) إذا كانت الدالة d حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 3 + s & \text{عندما } s > 2 \\ 1 + s^2 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$$

متصلة عند $s = 2$ فأوجد قيمة الثابت m ثم أبحث قابلية الدالة للاشتقاق عند $s = 2$

[4]

17) أوجد قيمة الثابت m إذا كانت الدالة d قابلة للاشتقاق عند $s = 2$ حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 2 + s & \text{عندما } s > 2 \\ 1 + s^2 + 8s - 9 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$$

[5]

18) إذا كان $d(s) = 1 + s^2 + b$ حيث m, b ثابتان أوجد:

① المشتقة الأولى للدالة d عند أي نقطة $(s, d(s))$

② قيمتي m, b إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(2, 3)$ الواقعة عليه

بساوي 12

[18-17]

19) إذا كان $d(s) = \frac{1}{s} + b$ حيث m, b ثابتان أوجد:

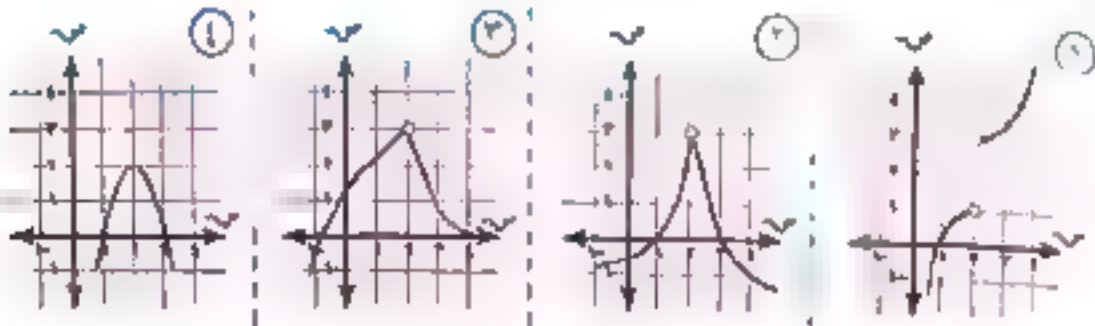
① المشتقة الأولى للدالة d عند أي نقطة $(s, d(s))$

② قيمتي m, b إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة $(1, 4)$ الواقعة عليه

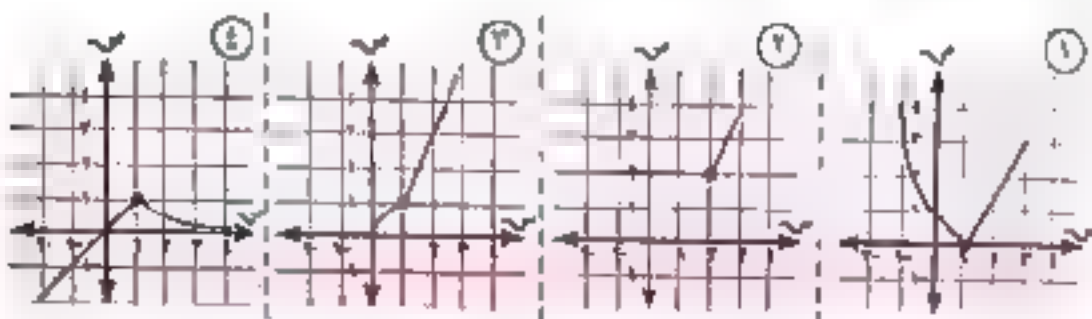
بساوي 3

[19]

أي الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند $x = 2$ ؟



أي الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ ؟



أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

① إذا كانت دالة f ومكان $x = 2$ ، $f'(2) = 1$ فإن f د (س) =

[٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة]

② إذا كانت الدالة f د (س) = $\begin{cases} 2 - x & \text{عندما } x > 2 \\ x - 2 & \text{عندما } x < 2 \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $x = 2$ ، فإن f =

[٢ - ١ ٤ صفر ١ ٤]

③ إذا كانت الدالة f د (س) = $\begin{cases} \sin x & \text{عندما } x \geq \frac{\pi}{4} \\ 2 - x & \text{عندما } x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{4}$ فإن f =

[صفر ١ ٤ ٢ ٤ ١ -]

$$\textcircled{1} \text{ إذا كانت الدالة } d: (s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s^2 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق عند $s = 2$ فإن $d'(2) = \dots$

$$[6 \text{ ك } 12 \text{ ك } 7 \text{ ك } 8]$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كانت } d: (s) = s \text{ فإن } d'(0) = \dots$$

$$[صفر \text{ ك } 2 \text{ ك } -2 \text{ ك غير موجودة}]$$

مسائل تقيس مستويات عمق التفكير

$$\textcircled{1} \text{ أبحث قابلية الاشتقاق للدالة } d: (s) = \begin{cases} (3-s)^2 & \text{عند } s = 2 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة d عند $s = 2$ حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \leq 1 \\ |s| & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة d حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} -s^2 + 2s + 1 & \text{عندما } s \geq 1 \\ \frac{2}{|s|} & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة d عند $s = 1$

إذا كانت الدالة d حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} 1 + s & \text{عندما } |s| \geq 1 \\ 1 + s^2 & \text{عندما } |s| < 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة d عند $s = 1$

إذا كانت الدالة d حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} 2 + s & \text{عندما } s > 1 \\ 4 + s^2 & \text{عندما } s \leq 1 \end{cases}$$

متصلة عند $s = 1$ و $d(1) = 11$ أوجد قيم الثابتين a و b

ثم أبحث قابلية الاشتقاق عند $s = 1$

[2.1]

قواعد الاشتقاق

الدروس

٣

علما أن المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ هي $y' = f'(x)$ ، فإن

والاحتمال أن إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال مثل $y = x^2 + 2x + 1$ ،
تحتاج إلى كثير من الجهد والوقت للوصول إليها لذلك سوف نتعرف على بعض قواعد
الاشتقاق التي تسهل علينا إيجاد المشتقة الأولى دون عناء أو جهد فيما يلي .

مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت $y = c$ حيث c (ثابت) $\in \mathbb{R}$ فإن $y' = \frac{dy}{dx} = 0$ صفر

وذلك لأن :

$$y = c \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y' = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}(c + 0) = \frac{d}{dx}c + \frac{d}{dx}0 = 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}(c + 0) = \frac{d}{dx}c + \frac{d}{dx}0 = 0 + 0 = 0$$

فمثلاً

إذا كانت $x = 3$

إذا كانت $x = -4$

فإن $x' = \text{صفر}$

فإن $x' = (\text{س}) \text{ صفر}$

المشتقة الأولى للدوال

إذا كانت $x = \text{س}$ حيث $x \geq 0$

إذا كانت $x = \text{س}$ حيث $x \geq 0$

إذا كانت $x = \text{س}$

فإن $\frac{dx}{dx} = \text{س}$ حيث $x \geq 0$

فإن $\frac{dx}{dx} = \text{س}$ حيث $x \geq 0$

فإن $\frac{dx}{dx} = 1$

فمثلاً

إذا كانت $x = \text{س}$

إذا كانت $x = \text{س}$

إذا كانت $x = \text{س}$

فإن $\frac{dx}{dx} = \text{س}$

فإن $\frac{dx}{dx} = \text{س}$

فإن $\frac{dx}{dx} = \text{س}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١. $x = (\text{س})$

٢. $x = (\text{س})$

٣. $x = (\text{س})$

٤. $x = (\text{س})$

الحل

١. $x = (\text{س})$

٢. $x = (\text{س})$

٣. $x = (\text{س})$

٤. $x = (\text{س})$

٥. $x = (\text{س})$

٦. $x = (\text{س})$

٧. $x = (\text{س})$

٨. $x = (\text{س})$

إذا كانت x, y, z دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير s فإن $x \pm y$ تكون أيضاً قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى s ويكون $\frac{d}{ds}(x \pm y) = \frac{dx}{ds} \pm \frac{dy}{ds}$ وبصفة عامة فإن،

إذا كانت d_1, d_2, \dots, d_n دوال قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير s فإن:

$$\frac{d}{ds}(d_1 \pm d_2 \pm \dots \pm d_n) = \left(\frac{d}{ds}d_1\right) \pm \left(\frac{d}{ds}d_2\right) \pm \dots \pm \left(\frac{d}{ds}d_n\right)$$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s^3 + 2s^2 + 5s) &= \frac{d}{ds}(s^3) + \frac{d}{ds}(2s^2) + \frac{d}{ds}(5s) \\ &= 3s^2 + 4s + 5 \end{aligned}$$

مثال

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١) $d(s) = 2s^3 + 3s^2 - 4s + 5$

٢) $s = (2s^2 - 4s + 7)$

٣) $s = \frac{2s^3 + 6s^2 + s + 1}{3}$ حيث $s \neq 0$

الحل

١) $d(s) = 2s^3 + 3s^2 - 4s + 5$

$\therefore d'(s) = 6s^2 + 6s - 4$

٢) $s = (2s^2 - 4s + 7)$ **بذلك الأقواس**

$= 2s^2 - 4s + 7$

$\therefore s' = 4s - 4$

$$\textcircled{3} \therefore \text{من} = \frac{\text{من}^3 + 2 \text{ من}^2 + \text{من} + 1}{3 \text{ من}} = \frac{1 + 2 + 1}{3} = 1$$

$$\therefore \frac{5 \text{ من}}{3 \text{ من}} = 1 - 1 = 0 \quad \text{من}^3 - 2 \text{ من}^2 - 3 \text{ من} - 1 = 0$$

مثال ٣

إذا كانت $\text{من} = 2$ من $2 \text{ من}^2 + 3 \text{ من} - 1$ فأوجد $\frac{1}{3 \text{ من}}$ فأوجد $\frac{5 \text{ من}}{3 \text{ من}}$

الحل

$$\text{من} = 2 \text{ من}^2 + 3 \text{ من} - 1 = 2 \times 4 + 3 \times 2 - 1 = 8 + 6 - 1 = 13$$

$$\frac{5 \text{ من}}{3 \text{ من}} = \frac{5 \times 13}{3 \times 13} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \quad \text{من} = 2 \text{ من}^2 + 3 \text{ من} - 1 = 13$$

مثال ٤

إذا كانت $\text{من} = 2$ من $2 \text{ من}^2 + 3 \text{ من} - 1$ فأوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١، ١)

الحل

$$\frac{5 \text{ من}}{3 \text{ من}} = \frac{5 \times 13}{3 \times 13} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{الميل عند النقطة (١، ١)} = \frac{5}{3}$$

مثال ٥

أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الإتحاف الموجب لمحور السينات للمحنى $\frac{1}{3 \text{ من}} = 0$ عند النقطة (٣، ١)

الحل

$$\frac{5 \text{ من}}{3 \text{ من}} = \frac{5 \times 13}{3 \times 13} = \frac{65}{39} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{الميل عند النقطة (٣، ١)} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{الميل} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \theta = 63.4^\circ$$

إذا كانت z ، u والتين عاملتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير s فإن الدالة (z, u) تكون
أيضا دالة للإشتقاق بالنسبة للمتغير s ويكون $\frac{d}{ds}(z, u) = \frac{dz}{ds} + \frac{du}{ds}$
أي أن مشتقه حاصل الصرب - الدالة الأولى \times مشتقة الثانية + الدالة الثانية \times مشتقة الأولى

مثال ٤

إذا كان $D = (s)$ $(2 + s^3)(1 + s^2 - s^4)$ فأوجد $D'(s)$
ثم أوجد $D'(1)$

الحل

$$D'(s) = \text{الدالة الأولى} \times \text{مشتقة الثانية} + \text{الدالة الثانية} \times \text{مشتقة الأولى}$$

$$= (2 + s^3) \times (2 - 4s^3) + (1 + s^2 - s^4) \times (3s^2)$$

$$= 4 - 2s^3 + 6 - 4s^3 + 3s^2 + 3s^4 - 3s^6$$

$$\therefore D'(1) = 4 - 2 + 6 = 8$$

ملاحظة: نلاحظ أن البدء بحساب مشتق الدالة الأولى ثم إيجاد $D'(1)$ كما يلي:

$$D = (s) \quad (2 + s^3)(1 + s^2 - s^4)$$

$$= 2 + 3s^2 - 2s^4 + s^3 + 3s^5 - 3s^7$$

$$\therefore D'(s) = 6s - 8s^3 + 3s^2 - 21s^6$$

مثال ٥

إذا كان $z = (s^2 - \sqrt{s})(2s^3 + \sqrt{s} - \frac{3}{s})$ أوجد $\frac{dz}{ds}$ عندما $s = 1$

الحل

$$\therefore \frac{dz}{ds} = (s^2 - \sqrt{s})(6s^2 + \frac{1}{2\sqrt{s}}) + (2s^3 + \sqrt{s} - \frac{3}{s})(2s - \frac{1}{2s^{3/2}})$$

$$\therefore \frac{dz}{ds} = (1 - 1)(6 + \frac{1}{2}) + (2 - 3)(2 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{(2s-1) \times (\frac{1}{4}s + 2s + 8) + (\frac{1}{4}s - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3s - \frac{1}{4}s + 2s + 4)}{(2s-1) \times (\frac{1}{4}s + 2s + 8) + (\frac{1}{4}s - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3s - \frac{1}{4}s + 2s + 4)}$$

عندما $s=1$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{(2(1)-1) \times (\frac{1}{4}(1) + 2 \times 1 + 8) + (\frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3(1) - \frac{1}{4}(1) + 2(1) + 4)}{(2(1)-1) \times (\frac{1}{4}(1) + 2 \times 1 + 8) + (\frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3(1) - \frac{1}{4}(1) + 2(1) + 4)}$$

إذا كانت u ، v دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير s وكانت v (س) $\neq 0$ ،
فإن الدالة $(\frac{u}{v})$ تكون أيضًا قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير s ويكون:

$$\frac{u}{v} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u}{v^2} \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

أي أن: مشتقة خارج القسمة = $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال ٥

أوجد المشتقة الأولى للدالة $\frac{2s}{3+s^2}$ ثم أوجد $D_{s=2}$

الحل

$$\frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2}$$

$$D_{s=2} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

مثال

أوجد $\frac{u}{v}$ إذا كان $\frac{(u+2)(u+3)}{u+4} = 1$

الحل

$$\frac{(u+2)(u+3)}{u+4} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{u}{v} = 1$$

$$\frac{1 \times (u+2)(u+3)}{(u+4)} = \frac{u}{u} \quad \therefore \frac{(u+2)(u+3)}{(u+4)} = \frac{u}{u}$$

$$\frac{u^2 + 5u + 6}{(u+4)} = \frac{u^2 + 2u + 1}{(u+4)} = \frac{u^2 + 5u + 6}{(u+4)}$$

مثال

أوجد ميل المماس للمعنى $\frac{u^2 + 2u + 1}{u+4} = 1$ عند $u=1$

الحل

$$\frac{1 \times (u^2 + 2u + 1)}{(u+4)} = \frac{(u+1)(u+1)}{(u+4)} = \frac{u^2 + 2u + 1}{(u+4)}$$

$$\frac{u^2 + 2u + 1}{(u+4)} = \frac{u^2 + 2u + 1}{(u+4)} = \frac{u^2 + 2u + 1}{(u+4)}$$

$$u' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{2+2+1}{4} = \frac{5}{4}$$

مسائل المستوى الأول

أكثر الإجابة صحيحة من بين الإجابات المعطاة.

① $\frac{x}{x+7} = \dots\dots\dots$ [٧ في صفر في ١ في غير موجودة]

② $\frac{x}{x+\pi} = \dots\dots\dots$ [صفر في ٠ في π في غير معرف]

③ $\frac{x}{x+7} = \dots\dots\dots$ [٦ في ٧ في ٧ في ٧]

④ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [٥ في ٢ في ٢ في ٦]

⑤ $\frac{x}{x+1} = \dots\dots\dots$ [$\frac{3}{x}$ في $\frac{3}{x+1}$ في $\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+1}$]

⑥ $\frac{x}{x+1} = \dots\dots\dots$ [٢ في $\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+1}$ في $\frac{2}{x}$ في $\frac{2}{x+1}$]

⑦ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [$\frac{3}{x}$ في $\frac{3}{x+2}$ في $\frac{1}{x}$ في $\frac{3}{x}$ في $\frac{3}{x+2}$]

⑧ $\frac{x}{x+1} = \dots\dots\dots$ [٤ في $\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+1}$ في $\frac{2}{x}$ في $\frac{2}{x+1}$]

⑨ $\frac{x}{x+1} = \dots\dots\dots$ [$\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+1}$ في $\frac{2}{x}$ في $\frac{2}{x+1}$]

⑩ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [$\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+2}$ في $\frac{2}{x}$ في $\frac{2}{x+2}$]

⑪ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [٣ في ٢ في ٢ في ٢]

⑫ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [٣ في ٣ في ٣ في ٣]

⑬ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [π في $\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+2}$ في $\frac{1}{x}$ في $\frac{1}{x+2}$]

⑭ $\frac{x}{x+2} = \dots\dots\dots$ [٧ في ٧ في ٧ في ٧]

مسائل المستوى الثاني

مسائل على مجموع دالتين أو عدة دوال

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية حيث $x \neq 0$:

$$(1) \text{ من } 4 - x + x^2 \quad (2) \text{ د (من) } = 2 - x^3 + 2 + x + 1$$

$$(3) \text{ من } 2 - x^3 - 4 + x^2 + 9 + x + 8 \quad (4) \text{ من } = \frac{1}{x^3} - 2 - x^2 - 1$$

$$(5) \text{ من } = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + x - 7 \quad (6) \text{ من } = (2 - x^3 + 2 + x^2 + 3)$$

$$(7) \text{ د (من) } = (x^2 - x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}) \quad (8) \text{ من } = 2 - x^{10} - 3 - x^2 - \frac{5}{x^3}$$

$$(9) \text{ من } = 2 - x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 4 \quad (10) \text{ من } = (3 - x^2 - \sqrt{x})$$

$$(11) \text{ من } = \sqrt{x} (2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}) \quad (12) \text{ د (من) } = \frac{x + 2 + x^2 - 3}{x}$$

$$(13) \text{ من } = \frac{2 - x^3 + 2 + x^2 - 7}{x^2} \quad (14) \text{ من } = \frac{4 - x^2 - 3 - x + 2}{x}$$

$$(15) \text{ من } = \frac{2 - x^2 - x + 2}{x} \quad (16) \text{ من } = 2 - x^3 + 2 + \sqrt{x}$$

$$(17) \text{ من } = \sqrt{x} - \frac{2}{x^2} - 9 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}$$

$$(18) \text{ من } = \frac{(3 - x)(3 + x)}{x^2} \quad (19) \text{ من } = \frac{(1 + x)(2 - \sqrt{x})(2 + x)}{\sqrt{x}}$$

$$(20) \text{ من } = x^2 + (1 + x)^2 - x + 5$$

أخيرًا: أوجد مصدقة من بين الإجابات المعطاة

(1) ميل المماس للمنحنى $y = x^3 - 3 + x^2 + 2 + x$ عند $x = 1$ يساوي

[صفر 4 - 1 4 1 2]

(2) ميل المماس للمنحنى $y = 2 + x^2 + 3 - x^3$ عند النقطة $(-1, -1)$ يساوي

[صفر 4 - 4 4 1]

(3) ميل المماس للمنحنى $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ عند النقطة $(1, 2)$ يساوي

[صفر 4 1 4 - 2]

قياس الزاوية التي يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات:

① $y = x^2 - 9$ عند $x = 9$ تساوى

[90° $^\circ 45$ $^\circ 30$ $^\circ 60$]

② د (س) = $x^3 + x^2 + x + 4$ عند $x = 9$ تساوى

[90° $^\circ 45$ $^\circ 30$ $^\circ 60$]

③ $y = x^2 - 3x + 5$ عند النقطة (1, 3) تساوى

[صفر $^\circ 30$ $^\circ 45$ $^\circ 60$]

④ د (س) = $\frac{1}{x} - x^2$ عند النقطة $(\frac{1}{3}, -\frac{10}{27})$ تساوى

[صفر $^\circ 30$ $^\circ 45$ $^\circ 60$]

٦ أثبت ان المماس للمنحنى $y = x^2 + \frac{1}{x}$ عند النقطة (1, 1) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{4}$

مسائل على مشتقة حاصل ضرب دالتين

٧ اوجد المشتقة الأولى لكل من لدوال الآتية:

① $y = (x^2 - 3)(x + 1)$

② $y = (x^2 + 1)(x - 2)$

③ $y = (x^2 + 2)(x - 1)$

④ $y = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$

⑤ $y = (x^2 + 1)(x^2 - 2)$

⑥ $y = (x^2 + 3)(x^2 - 2)$

⑦ $y = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

⑧ $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

⑨ $y = (x^2 + 1)(\frac{1}{x} - \sqrt{x})$

⑩ $y = (x^2 - 2)(x^2 + 3)$

مسائل على مشتقة خارج قسمة دالتين

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$\textcircled{2} \text{ ص } \frac{1-s}{3+s^2}$$

$$\textcircled{1} \text{ ص } \frac{s}{2+s}$$

$$\textcircled{4} \text{ ص } \frac{2-s^5}{1+s^5}$$

$$\textcircled{3} \text{ ص } \frac{9-s^2}{3-s}$$

$$\textcircled{6} \text{ ص } \frac{3-s^2}{1+s^2}$$

$$\textcircled{5} \text{ ص } \frac{s}{3-s^2}$$

$$\textcircled{8} \text{ ص } \frac{s^2+2s+5}{1+s^5-s^2}$$

$$\textcircled{7} \text{ ص } \frac{s^2+1+s}{2+s}$$

$$\textcircled{10} \text{ ص } \frac{s^2}{2-s} + \frac{s}{2+s}$$

$$\textcircled{9} \text{ ص } \frac{(1+s)(1-s)}{1+s^2}$$

أوجد ميل المماس للمحنى ص = $\frac{s}{1+s^2}$ عند $s=2$ [$\frac{2}{15}$]

مسائل متنوعة على قواعد الاشتقاق

١٩ إذا كان ص = $s^2 - 3s - 9$ من فأوجد قيم س التي تجعل $\frac{ص}{س} =$ صفر [٣، ١٠]

٢٠ إذا كان د (س) = $s^3 - 5s + 2$ فأوجد قيم س التي تجعل د' (س) = ٧ [١٢]

٢١ إذا كان د (س) = $(2-s)(3+s+1)$ فأوجد قيم س التي تجعل د' (س) = 5 [١]

٢٢ إذا كان د (س) = $\frac{s}{1+s^2}$ فأوجد قيم س التي يكون عندها د' (س) = صفر [١١، ١٠]

٢٣ إذا كانت ص = $s^3 - 1 + s + 1$ د' (١) = ١ فأوجد قيمة 1 [١]

٢٤ إذا كانت د (س) = $1 + s^3 + ب$ من وكانت د (١) = ٢، د' (١) = ٠، فأوجد قيمة كل من 1، ب [٢٠، ١٠]

٢٥ إذا كان ميل المماس للمحنى ص = $s^2 + 1 + س + ب$ يساوي ١ عند النقطة (٢، ٢) فأوجد قيمة كل من 1، ب [١٠، ١٠]

100) أوجد $\frac{y}{x}$ إذا كانت :

$$x = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$$

101) أوجد ميل المماس للمنحنى $x = 1 - t$ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات [10، 1]

102) أوجد ميل المماس للمنحنى $x = 1 - t$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات [20، 1]

103) أوجد ميل المماس للمنحنى $x = 1 - t$ عند كل نقطة من نقطة تقاطعه مع المستقيم $x + 2y = 4$ [4-11]

104) حدد نوع الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى $x = 1 - t$ عند النقطة (2، 1) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [خالد، متفرجة]

105) إذا كان $x = 1 - t$ و $y = 2 - t$ عند $t = 1$ وكان متوسط تغير x عندما تتغير x من -1 إلى 2 يساوي y فأوجد قيمتي x و y [1-11]

106) إذا كان $x = (2 + t)$ و $y = 3 - t$ أوجد $\frac{y}{x}$ عند $x = 1$ [1/1]

107) إذا كان ميل المماس للمنحنى $x = 1 - t$ يساوي $\frac{4}{3}$ عند النقطة (1، 4) أوجد قيمتي x و y [3-11]

108) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

1) إذا كان $x = (t)$ و $y = 1 + t$ و $z = 4 + t$ فإن $\frac{dz}{dx} = \dots$ [3-11]

2) إذا كانت $x = (t)$ و $y = 5 - t$ فإن معدل تغير y عند $x = 2$ يساوي \dots [7-11]

3) إذا كانت $x = (t)$ و $y = \frac{1}{t}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \dots$ [2-11]

4) إذا كانت $x = (t)$ و $y = \frac{1}{t}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \dots$ [1/11]

5) إذا كانت $x = (t)$ و $y = (t)$ و $z = (t)$ فإن $\frac{dz}{dx} = \dots$ [1-11]

قابلية التوافق على مس = ٩٠ هان م + له = ١٠٠

(v) بلا مکان سے $m = 3$ فٹاں $\frac{m}{m} = 1$ سے زیادہ

$$\textcircled{6} \text{ ہذا مقام پر } \frac{1-x^2}{2} = \frac{1}{2} \text{ تاں } x = 0 \text{ ہے}$$

مسائل تقيس مستویان عیالی انهم

أوجد ميل المماس لمحتوى المسألة ص = س | س - 3 | عند النقطة (2, 2)

بما: أوجد المشتقة الأولى للدالة هي = $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

١٢) إذا كان ميل المماس للمحطة $M = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}$ عند النقطة $(1, 3)$ الواقعة على C

فلاوجد قيمتي اء ب

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

الحل

٤

إذا كانت $y = f(u)$ حيث u قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x ، عند حقيقى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أو أن مشتقة قوس $u = f(u)$ (القوس) \times مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً

$$\text{إذا كانت } y = (x^2 + 5)^3$$

$$\text{فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \text{ (القوس) } \times \text{ مشتقة ما بداخل القوس}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (x^2 + 5)^2 \times (2x) = 2x(x^2 + 5)^2$$

ملاحظات

○ إذا كانت من دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x

$$\text{فإن } \frac{d}{dx} (u^v) = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{فمثلاً } \frac{d}{dx} (x^2) = 2 \cdot x^{2-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

○ يمكن ملاحظة أنه إذا كانت $u = f(x)$ حيث $d(x) > 0$

$$\text{فإن } \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot d'(x)$$

أو أن مشتقة الجذر التربيعي للدالة $= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times$ مشتقة ما تحت الجذر

مثال

أوجد المشتقة الأولى لدالة: $y = (x^2 + 3)^4$

الحل

$$y = (x^2 + 3)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(x^2 + 3)^3 \times 2x = 8x(x^2 + 3)^3$$

مثال

إذا كانت $y = \sqrt{x^2 + 1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = (2 + x)^3 (3 - x)^4$

الحل

$y' =$ الدالة الأولى \times مشتقة الثانية + الدالة الثانية \times مشتقة الأولى

$$y' = (2 + x)^3 \times 4(3 - x)^3 + [(2 + x)^3] \times 3(3 - x)^3$$

$$= 4(2 + x)^3 (3 - x)^3 + 3(2 + x)^3 (3 - x)^3$$

$$= (4 + 3)(2 + x)^3 (3 - x)^3 = 7(2 + x)^3 (3 - x)^3$$

مثال ٤

إذا كان $y = \left(\frac{2 - x^2}{3 + x^2} \right)^5$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$y' = 5 \left(\frac{2 - x^2}{3 + x^2} \right)^4 \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(2 - x^2)^4}{(3 + x^2)^4} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(2 - x^2)^4}{(3 + x^2)^4} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5(2 - x^2)^4}{(3 + x^2)^4} \times \frac{dy}{dx}$$

إذا كان $x = y$ دالتين حيث $x = d(x)$ ، $y = s(y)$ فإن $s = d$ [$s(y)$]
ونقول s من حالة الدالة s ولايجاد مشتقة دالة s يمكن اتباع النظرية التالية:

إذا كانت $s = d(x)$ قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير x
وكانت $x = s(y)$ قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير y
فإن $s = d(x)$ تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير y
ويكون $\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{dy}$ (نلاحظ هذه النظرية بقاعدة السلسلة)

مثال

إذا كان $s = x^2$ ، $x = 2 + s^2$ أوجد $\frac{ds}{dy}$

الحل

$$\frac{ds}{dx} = \frac{2x}{2} = x$$

$$\frac{dx}{dy} = 2s$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2s}{2} = s$$

$$x = 2 + s^2$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{dy} = x \times 2s = 2s \times x$$

$$\frac{ds}{dy} = 2s \times (2 + s^2) = 4s + 2s^3$$

مثال

إذا كانت $s = 2x^2$ ، $x = 3 - s^2$ أوجد $\frac{ds}{dy}$ عند $s = 1$

الحل

بالنعوض عن x

$$s = 2(3 - s^2)^2$$

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{dy} = \frac{4x}{2} \times (-2s) = -4xs$$

$$\frac{ds}{dy} = -4(3 - s^2)s$$

$$\frac{و}{س} = \frac{3(2-س) \times 2 \times 2 - 3}{س}$$

$$عند س = 4 \text{ يكون } \frac{و}{س} = \frac{3(2-4) \times 2 \times 2 - 3}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

حل آخر

$$\frac{و}{ع} = 6 \times ع^2, \frac{و}{س} = \frac{2-س}{2(س-3)}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{و}{ع} \times \frac{ع}{س}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{2-س}{2(س-3)} \times 6 \times ع^2 = \frac{3(2-س)}{(س-3)}$$

$$= \frac{3(2-س)}{2(س-3)}$$

$$عند س = 4 \text{ يكون } \frac{و}{س} = \frac{3(2-4)}{2(4-3)} = \frac{30}{4} = 7.5$$

مثال (٧)

إذا كانت $\frac{و}{س} = \frac{1-ع}{1+ع}$ ، $ع = س + 1$ ، فأوجد $\frac{و}{س}$

الحل

يمكن الحل بطريقتين كما في المثال السابق ولكن الطريقة الأسهل هي التعويض أولاً

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{1-1+س}{1+1+س} = \frac{س}{2+س}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{1-(2+س)}{(2+س)}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{2}{2(2+س)}$$

مثال

أوجد كلاً مما يأتي حيث أن ما بداخل الأقواس نوال وليست ثوابت:

- ١ $\frac{3}{5}$ (س ١) ٢ $\frac{4}{5}$ (س ٣) ٣ $\frac{5}{8}$ (س ٤)
٤ $\frac{6}{5}$ (س ٣) ٥ $\frac{7}{5}$ (ك ١٧) ٦ $\frac{8}{5}$ (س ٣)

الحل

- ① $\frac{3}{5}$ (س ١) = ١ س ٣ $\times \frac{5}{5}$ (تشتقها كدالة مثل (دالة في قوس ١))
② $\frac{4}{5}$ (س ٣) = ٢ س ٤ $\times \frac{5}{5}$ (لاحظ أن الاشتقاق بالنسبة إلى س)
③ $\frac{5}{8}$ (س ٤) = ٥ س ١ $\times \frac{5}{5}$
④ $\frac{6}{5}$ (س ٣) = ٣ س ٦
⑤ $\frac{7}{5}$ (ك ١٧) = ٧ س ٦ $\times \frac{5}{5}$
⑥ $\frac{8}{5}$ (س ٣) = ١ س ٨ $\times \frac{5}{5}$ (سيتبقى من $\frac{8}{5}$ ولا تكتبها)

مثال

إذا كان $س^٢ = س^٢ + س + ١$ فأوجد $\frac{د}{دس}$

الحل

∴ $س^٢ = س^٢ + س + ١$ بأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ ٢س = \frac{د}{دس} (س^٢ + س + ١)$$

$$∴ \frac{د}{دس} = \frac{٢س}{س^٢ + س + ١}$$

هذا الكتاب
مكتبة
الجامعة

اجمع معك واختر نفسك

اختبار براكمي

اجب عن الاسئلة تالية

١) متوسط تغير الدالة d حيث $d = 3s^2 + 2s + 5$ عندما تتغير s

[١) ٢) ٣) ٤) ٥)]

من ١ إلى ٣ يساوي

٢) $\frac{d}{ds} (3s^2) = \dots\dots\dots$

[$\frac{3s^2}{2}$) $\frac{3s^2}{2}$) $\frac{3s^2}{2}$) $\frac{3s^2}{2}$)]

٣) ميل المماس للمحنى $s = \frac{1}{s}$ عندما $s = -1$ يساوي

[١) -١) صفر) ٢)]

٤) قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمحنى $s = 2 - 9s$ مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات عند $s = 1$ تساوي

[١٥) ٣٠) ٦٠) ١٣٥)]

٥) إذا كان $s = (2 - s)(3 + s^2)$ فأوجد $\frac{ds}{dt}$

٦) أوجد معدل التغير للدالة d حيث $d = 3 - s$ عندما $s = 1$

مسائل المستوى الأول

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

- ① $y = (x^2 + 3)^2$ د (س) = $(x^2 + 3)^2$
- ② $y = (x^2 - 2)^2$ د (س) = $(x^2 - 2)^2$
- ③ $y = 2\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$ ص = $2\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$
- ④ $y = 2\left(\frac{x^2}{1 + x}\right)$ ص = $2\left(\frac{x^2}{1 + x}\right)$
- ⑤ $y = x^2(1 - x)$ ص = $x^2(1 - x)$
- ⑥ $y = \sqrt{x^2 + 3}$ ص = $\sqrt{x^2 + 3}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ① إذا كانت ص = $(x^2 + 3)^2$ فإن $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 $[2(x^2 + 3) \quad 4(x^2 + 3) \quad 2(x^2 + 3)^2 \quad 4(x^2 + 3)^2]$
- ② إذا كان $\frac{y}{x} = 3$ ، $\frac{dy}{dx} = 2$ فإن $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 $[0 \quad 2 \quad 4 \quad 6]$
- ③ إذا كان د (س) = $(x^2 + 1)^3$ فإن د' (س) = $\dots\dots\dots$
 $[3x^2 \quad 6x \quad 12x \quad 24x]$
- ④ إذا كان د (س) = $(x^2 - 5)^4$ فإن د' (س) = $\dots\dots\dots$
 $[4x^3 \quad 4x \quad 4 - 4x \quad 4x^3 - 4x]$
- ⑤ إذا كان ص = $(1 + x)^3$ ، $x = 3$ ، $y = 1$ فإن $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 $[3 \quad 3^2 \quad 9 \quad 9^2]$
- ⑥ إذا كان ص = $(x^2 - 1)^2$ ، $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$ عندما س = ٠
 $[0 \quad 10 \quad 4 \quad 10]$
- ⑦ إذا كان ص = x^2 فإن $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
 $\left[\frac{2}{x^3} \quad \frac{2}{x^2} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{1}{x}\right]$

٨) إذا كان $x = \sqrt{2 - x}$ فإن $\frac{x}{x-1} = \dots$

$\left[\frac{1-x}{x} \right]$ أ ١- ب ٢- ج ١- د $\frac{1-x}{x}$ هـ ٢-

٩) إذا كان $(x + y)^2 = 5$ فإن $\frac{x}{x+y} = \dots$

$\left[\frac{1}{2} \right]$ أ ١- ب صفر ج ٣ د ٥

١٠) إذا كان $\frac{x}{x+y} = \frac{2}{3}$ فإن $\frac{y}{x+y} = \dots$

$\left[\frac{1}{3} \right]$ أ ٢- ب ٣- ج ١- د ٢

مسائل المستوى الثاني

١ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١) $y = (x^2 + 5)^3$ ٢) $y = (x^2 - 3)^2$
٣) $y = (x^3 + x - 9)^5$ ٤) $y = \left(\frac{2}{x} - 3 \right)^4$

٢ اختر لإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) مشتقة الدالة $y = (x^2 - 3)^2$ عند $x = 4$ يساوي \dots

$\left[\frac{1}{3} \right]$ أ ١- ب ٢- ج ٣- د ٤- هـ ٥-

٢) مشتقة الدالة $y = (x^2 - 3)^2$ عند $x = 3$ يساوي \dots

$\left[1 \right]$ أ ١- ب ٢- ج صفر د ٤-

٣) مشتقة الدالة $y = (x^2 + 2 - x)^2$ عند $x = 1$ يساوي \dots

$\left[1 \right]$ أ ١- ب ٢- ج صفر د ٤-

٤) مشتقة الدالة $y = (x^2 + 3 + x + 2)^2$ عند $x = 2$ يساوي \dots

$\left[2 \right]$ أ ١- ب ٢- ج ٤- د ٥- هـ ٦-

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١) $y = (x^2 - 2)^2$ ٢) $y = (x^2 - 3)^2$
٣) $y = (x^2 + 1)^2$ ٤) $y = (x^2 + 1)^2$
٥) $y = (x^2 + 1)^2$ ٦) $y = (x^2 + 1)^2$

أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

② $y = \left(\frac{1-s}{1+s} \right)^2$ من $\frac{y}{s}$ فأوجد $\frac{y}{s}$

① $y = \left(\frac{3+s}{s} \right)^2$ من $\frac{y}{s}$ فأوجد $\frac{y}{s}$

④ $y = \left(\frac{2}{s-2} \right)^2$ من $\frac{y}{s}$ فأوجد $\frac{y}{s}$

③ $y = \left(\frac{2-s^2}{1+s} \right)^2$ من $\frac{y}{s}$ فأوجد $\frac{y}{s}$

فأوجد $\frac{y}{s}$

⑩ إذا كان $y = 2x^2 - 3x + 2$ فأوجد $\frac{y}{s}$

فأوجد $\frac{y}{s}$

⑪ إذا كان $y = 2x^2 + 8x - 11$ فأوجد $\frac{y}{s}$

فأوجد $\frac{y}{s}$

⑫ إذا كان $y = 2x^2 - 3x + 2$ فأوجد $\frac{y}{s}$

فأوجد $\frac{y}{s}$

⑬ إذا كان $y = 2x^2 + x + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$

فأوجد $\frac{y}{s}$

⑭ إذا كان $y = 3x^2 - x + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

⑮ إذا كان $y = \frac{1+x}{1-x}$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 2$

⑯ إذا كان $y = \frac{4-s}{3-s}$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 2$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 2$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

⑰ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

⑱ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

⑲ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

⑳ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

㉑ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

㉒ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

㉓ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

㉔ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

㉕ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

㉖ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

$\left[\frac{1}{s} \right]$

㉗ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

㉘ إذا كان $y = s^2 + 1$ فأوجد $\frac{y}{s}$ عندما $s = 1$

٢٣ إذا كان $x = 2$ ، $y = 3$ ، $z = 5$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(2, 3, 5)$ على هذا المنحنى (١)

٢٤ إذا كان $x = 3$ ، $y = 4$ ، $z = 5$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(3, 4, 5)$ على هذا المنحنى (١)

٢٥ إذا كان $x = 4$ ، $y = 5$ ، $z = 6$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(4, 5, 6)$ على هذا المنحنى (١)

٢٦ أوجد ميل المماس لمنحنى $\left(\frac{x+y}{1+x}\right)^2$ عند النقطة $(2, 3)$ على هذا المنحنى (١)

٢٧ إذا كان $x = 2$ ، $y = 3$ ، $z = 5$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(2, 3, 5)$ على هذا المنحنى (١)

٢٨ إذا كان $x = 3$ ، $y = 4$ ، $z = 5$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(3, 4, 5)$ على هذا المنحنى (١)

٢٩ إذا كان $x = 4$ ، $y = 5$ ، $z = 6$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(4, 5, 6)$ على هذا المنحنى (١)

٣٠ إذا كان $x = 5$ ، $y = 6$ ، $z = 7$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(5, 6, 7)$ على هذا المنحنى (١)

٣١ إذا كان $x = 6$ ، $y = 7$ ، $z = 8$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(6, 7, 8)$ على هذا المنحنى (١)

٣٢ إذا كان $x = 7$ ، $y = 8$ ، $z = 9$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(7, 8, 9)$ على هذا المنحنى (١)

٣٣ إذا كان $x = 8$ ، $y = 9$ ، $z = 10$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(8, 9, 10)$ على هذا المنحنى (١)

٣٤ إذا كان $x = 9$ ، $y = 10$ ، $z = 11$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(9, 10, 11)$ على هذا المنحنى (١)

٣٥ إذا كان $x = 10$ ، $y = 11$ ، $z = 12$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(10, 11, 12)$ على هذا المنحنى (١)

٣٦ إذا كان $x = 11$ ، $y = 12$ ، $z = 13$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(11, 12, 13)$ على هذا المنحنى (١)

٣٧ إذا كان $x = 12$ ، $y = 13$ ، $z = 14$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(12, 13, 14)$ على هذا المنحنى (١)

٣٨ إذا كان $x = 13$ ، $y = 14$ ، $z = 15$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(13, 14, 15)$ على هذا المنحنى (١)

٣٩ إذا كان $x = 14$ ، $y = 15$ ، $z = 16$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(14, 15, 16)$ على هذا المنحنى (١)

٤٠ إذا كان $x = 15$ ، $y = 16$ ، $z = 17$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ فأنبت أن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ عند النقطة $(15, 16, 17)$ على هذا المنحنى (١)

ليست لكافة مشتقة له اداة

① إذا كان $s^1 = s^2$ فإن: $\frac{s}{s} = \dots$

$$\left[\frac{2}{s}, \frac{s^2}{s}, \frac{s^3}{s}, \frac{s^4}{s} \right]$$

② إذا كان $s = (s + 1)^2$ ، $\frac{s}{s} = 12$ عند $s = 1$ صفراً فإن \dots

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

③ إذا كان $s = \frac{1}{1-s}$ ، $\frac{s}{s} = 2$ ، $\frac{s}{s} = \dots$ فإن $\frac{s}{s} = \dots$

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

④ يُصب زيت بمعدل 90 لتر/ساعة في برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطره 1 متر ، $s = \dots$ فإن معدل ارتفاع الزيت في البرميل \dots

$$\left[\frac{1}{\pi 810}, \frac{1}{\pi 81}, \frac{1}{810}, \pi 810 \right]$$

مسائل تقويس مستويات عمياء في التفكيك

أوجد، $\frac{s}{s}$

إذا كان $s = \frac{s(1+s)}{1+(1+s)}$

إذا كان $s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^7 + s^8 + s^9 + s^{10} = 1$ فأوجد، $\frac{s}{s}$

إذا كان $x = \frac{1}{s} + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^7 + s^8 + s^9 + s^{10} = 4$

أوجد، $\frac{s}{s}$ عند $s = 1$

$$\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{s} \right]$$

إذا كان $(s + 3) = (s - 1)^2$ فائت أن، $\frac{s}{s} = \frac{3}{4} = \frac{3}{s-1}$

إذا كانت $s = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2$ ، $x = s + s^2 + s^3$ فأوجد، $\frac{s}{s}$ عند $s = 1$

إذا كان $s = s^2 + 1 = x$ ، $\frac{s}{s} = \frac{1}{x} = \frac{1}{s^2 + 1}$ فائت أن، $\frac{s}{s} = \frac{1}{x} = \frac{1}{s^2 + 1}$

إذا كانت $s = s^2 + s$ ، $x = \frac{1-s}{s}$ فأوجد، $\frac{s}{s}$ عند $s = 1$

إذا كانت $s = \left(\frac{s^2 - 2}{s^2 + 2} \right)^2$ فائت أن، $\frac{s}{s} = \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2 - 2}$

مشتقات الدوال المثلثية

الأدلة

٥

مشتقة دالة الجيب

لنا علاقات $d = \sin(s)$ و $d' = \cos(s)$ فإن $d' = \cos(s)$

البرهان غير مفيد على الطالب،

$$d = \sin(s) \Rightarrow d' = \cos(s) \Rightarrow d' = \cos(s)$$

$$\therefore d' = \cos(s) = \frac{d}{ds} \sin(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right)$$

$$= \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\sin(s)}{1} \right)$$

$$\frac{d}{ds} \sin(s) = \cos(s)$$

أي أن

المشتقة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير s ،

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] \text{ هنا } \frac{1}{s}$$

أو أن، هنا $\frac{1}{s}$ مشتقة هذه الدالة

فمثلاً

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] (3 + s) = \frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] (3 + s) = \frac{1}{s} \times 1 = \frac{1}{s}$$

وأيضاً إذا كانت $s = (s^2 + 4)$ ، فإن

$$s' = \frac{d}{ds} (s^2 + 4) = 2s$$

وبصفة عامة إذا كانت $s = (d(s))$ ، فإن

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] \text{ هنا } s$$

وبصفة عامة إذا كانت $s = (d(s))$ ، فإن $s' = d'(s)$ هنا $(d(s))$

$$\text{فمثلاً إذا كانت } s = (2s^2 - 1) \text{ فإن } s' = 4s$$

مشتقة دالة s

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] \text{ هنا } s$$

وبصفة عامة إذا كانت $s = (d(s))$ ، فإن $s' = d'(s)$ هنا $(d(s))$

$$\text{فمثلاً إذا كانت } s = (2 + s^2) \text{ فإن } s' = 2s$$

ملاحظات

$$\frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] = \frac{1}{s} \left[\frac{d}{ds} \right] \text{ هنا } \left(s - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \left(s - \frac{\pi}{4} \right) \times 1 = s - \frac{\pi}{4}$$

$$2) \frac{\text{ها}}{\text{س}} = \left(\frac{\text{ها}}{\text{س}} \right) \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{ها} \times \text{س}}{\text{س}^2} = \frac{\text{ها} \times \text{س} - (\text{ها} \times \text{س})}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{\text{ها} \times \text{س} - (\text{ها} \times \text{س})}{\text{س}^2} = \frac{\text{ها} \times \text{س} - \text{ها} \times \text{س}}{\text{س}^2} = \frac{0}{\text{س}^2} = 0$$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

- ١) $y = 2x$ ٢) $y = x^2$
٣) $y = x^2 + 2x$ ٤) $y = x^2 - 2x$

الحل

- ١) $y = 2x$ ٢) $y = x^2$
٣) $y = x^2 + 2x$ ٤) $y = x^2 - 2x$
٥) $y = x^2 + 2x - 2x$
٦) $y = x^2 + 2x - 2x$
٧) $y = x^2 + 2x - 2x$
٨) $y = x^2 + 2x - 2x$

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

- ١) $y = (x+1)^2$ ٢) $y = x^2 + 2x + 1$
٣) $y = (x+1)^3$ ٤) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

الحل

- ١) $y = (x+1)^2$ ٢) $y = x^2 + 2x + 1$
٣) $y = (x+1)^3$ ٤) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
٥) $y = (x+1)^4$ ٦) $y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
٧) $y = (x+1)^5$ ٨) $y = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\sin} \Rightarrow 1 = \sin \times (4 + \sin) \Rightarrow 1 = 4\sin + \sin^2$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\sin} \Rightarrow 2 = \sin \times 3 + \sin^2 \Rightarrow 2 = 3\sin + \sin^2$$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

$$\textcircled{1} y = \sin(2 + \sin 3) \quad \textcircled{2} y = \sin(5 + \sin 2)$$

الحل

$$\textcircled{1} y = \sin(2 + \sin 3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(2 + \sin 3) \times \sin 3$$

$$y = \sin(2 + \sin 3)$$

$$\textcircled{2} \frac{dy}{dx} = \cos(5 + \sin 2) \times 2 \sin 2$$

$$y = \sin(5 + \sin 2)$$

مثال ٤

$$\text{إذا كانت } y = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sin\right) \text{ فأثبت أن } \frac{dy}{dx} = -\sin 2$$

الحل

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \sin\right) \times \sin$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sin\right) = \sin(\pi + 2) \quad (\text{لأن } 2 \text{ هنا } 1 \text{ هنا } 1 = 2)$$

$$= -\sin 2$$

مثال

أوجد $\frac{u}{v}$ (ما ٢ س) عند س = π

الحل

$$D'(S) = \frac{(1 + \text{ما ٢ س}) \times 2 \times \text{ما ٢ س} - \text{ما ٢ س} \times 2 \times \text{ما ٢ س}}{(1 + \text{ما ٢ س})^2}$$

$$D'(S) = \pi = \frac{\pi \times 2 \times \text{ما ٢ س} + (\pi \times 2 \times \text{ما ٢ س})}{(1 + \text{ما ٢ س})^2}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{0 \times 0 \times 2 + (1 \times 2)(1 + 1)}{(1 + 1)^2}$$

مثال

أوجد $\frac{u}{v}$ (إذا كان س = ما (طا ٥ س))

الحل

∴ س = ما (طا ٥ س) بفرض أن ع = طا ٥ س

فإن س = ما ع ، ع = طا ٥ س

∴ $\frac{u}{v} = \text{ما ع}$ ، $\frac{u}{v} = \frac{ع}{\text{طا ٥ س}}$ ، $\frac{u}{v} = \frac{ع}{\text{طا ٥ س}}$

∴ $\frac{u}{v} = \frac{u}{v} = \frac{u}{v} \times \frac{ع}{\text{طا ٥ س}} = \frac{ع}{\text{طا ٥ س}}$

$\frac{u}{v} = \frac{u}{v} = \frac{u}{v} \times \text{ما ع} = \text{ما ع}$

حتى آخر

∴ س = ما (طا ٥ س) = ما (طا ٥ س) × ما ع = ما ع

مثال ٧

أثبت أن المماس للمنحنى $y = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$ عند $x = \pi$ يصنع زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$$y = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$$

عند $x = \pi$

$$y = \frac{1}{4} \times \pi - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$y = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$$

$$\therefore y = \frac{\pi x}{4} - \pi$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Shift Tan 1 = 45}$$

مثال ٨

إذا كانت $y = \frac{\pi}{4}$ أوجد معدل تغير y بالنسبة إلى x عندما $x = \frac{\pi}{4}$

الحل

\therefore معدل تغير y بالنسبة إلى $x = \text{ميل المماس} = \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{عندما } x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{0} = \text{مفرد}$$

راجع معنا واختر نفسك

اختبار تكملي

الدقة



أجب عن أسئلة الآتيه

① إذا كان $\frac{x}{y} = 3$ ، $\frac{y}{x} = 2$ فإن $\frac{x}{y} = \dots$

[5 د 6 ك 1 د 2 ك]

② إذا كان $d = (x - 5)$ فإن $d' = (2)$ =

[8 - د 4 - ك 4 د 8 -]

③ إذا كان $(x + y) = 3$ فإن $\frac{x}{y} = \dots$

[1 د صغر ك 3 د 5]

④ إذا كان متوسط التغير في $d = 3, 2$ عندما تتغير x من 7 إلى $7, 2$

فإن التغير في $d = \dots$ [6 - د 6 ك 6 د 6 -]

⑤ أوجد المشتقة الأولى لكل من لدوال الآتية:

(أ) $\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2$ (ب) $x^3 = 3x^2 - 1$

⑥ إذا كانت الدالة d حيث $d = \left(\frac{1}{x} \right)$ عندما $x > 1$ عندما $x < 1$

متصلة عند $x = 1$ فأوجد قيمة الثابت k ثم أبحث قابلية الاشتقاق عند $x = 1$

الادوات المستخدمة:

أختار ٣٠

① إذا كانت $ص = ط$ فإن $\frac{و}{ص} = \frac{ط}{و}$ =

[قاس ك قاس ك قاس ك قاس ك قاس ك]

② إذا كانت د (س) = حـ ٥ س فإن د' (س) = =

[٥ ك ٥ حـ ٥ س ك ٥ حـ ٥ س ك ٥ حـ ٥ س]

③ إذا كان $ص = حـ ١ \pi$ فإن $ص' = \dots\dots\dots$

[١- ك صفر ك $\frac{1}{\pi}$ ك ١]

④ $\frac{1}{و}$ (حـ ٣٠) = = $\frac{1}{\pi}$ حـ ٣٠ ك حـ ٣٠ ك صفر ك $\frac{1}{\pi}$]

⑤ إذا كانت $ص = حـ (٢ س + ٥)$ فإن $ص' = \dots\dots\dots$

[١ حـ ٢ س ك ٢- حـ ٢ س ك حـ (٢ س + ٥) ك ٢ حـ (٢ س + ٥)]

⑥ إذا كانت $ص = ط (٤ - س - ٣)$ فإن $ص' = \dots\dots\dots$

[٣ ط (٤ - س - ٣) ك ٣ قـ (٤ - س - ٣) ك]

[٣ قـ (٤ - س - ٣) ك ٣ طـ (٤ - س - ٣)]

⑦ إذا كانت $ص = ٣ حـ (٢ - ٤ س)$ فإن $ص' = \dots\dots\dots$

[٤ حـ (٢ - ٤ س) ك ١٢ حـ (٢ - ٤ س) ك]

[٦ حـ (٢ - ٤ س) ك ١٢- حـ (٢ - ٤ س)]

⑧ إذا كانت د (س) = س' + حـ ٤ س فإن د' (س) = =

[٢ س - ٤ حـ ٤ س ك س' + ٤ حـ ٤ س ك]

[٢ س + ٤ حـ ٤ س ك ٢ س + ٤ حـ ٤ س ك]

⑨ إذا كانت $ص = ٣ س - حـ ٢ س$ فإن $ص' = \dots\dots\dots$

[٣- حـ ٢ س ك ٣+ حـ ٢ س ك ٢+ حـ ٢ س ك ٢- حـ ٢ س]

⑩ إذا كانت (\sin) ط $(\pi - \sin)$ فإن $\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$
 [٥ ك ٢٥ ك ١ ك ٧]

⑪ إذا كانت (\sin) ما \sin فإن $\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$
 [صفر ك ١ ك ١ ك ٧]

اختر الزجاجة الصحيحة من بين الخيارات المعطاه.

① $\frac{f}{\sin} = (\sin - \sin)$ \dots
 [- ما $\sin + \sin$ ك ما $\sin \sin$ ك
 - ما $\sin - \sin$ ك ما $\sin + \sin$]

② $\frac{f}{\sin} = (\sin + \sin)$ \dots
 [٥ ك ٢ ق ٢ ق ٥ ك ٥ ق ٢ ق ٥ ك
 ٥ ق ٢ ق ٥ ك ٥ ق ٢ ق ٥ ك]

③ $\frac{f}{\sin} = (\sin^2)$ \dots
 [٥ ق ٣ ق ٣ ق ٥ ك ٥ ق ٣ ق ٣ ق ٥ ك
 ٣ ق ٣ ق ٣ ق ٥ ك ٥ ق ٣ ق ٣ ق ٥ ك]

④ $\frac{f}{\sin} = \left(\frac{\pi}{2}\right)$ \dots
 [٣ ك ٢ ك ١ ك ١ ك ٣ ك]

⑤ $\frac{f}{\sin} = (\pi^2)$ \dots [صفر ك ١ ك ١ ك ١ ك ٢ ك]

⑥ $\frac{f}{\sin} = (\sin^2 + \sin^2)$ \dots
 [صفر ك ١ ك ١ ك ٢ ك ٢ ك ٢ ك ٢ ك]

⑦ $\frac{f}{\sin} = (\sin^2 + \sin^2)$ \dots
 [صفر ك ١ ك ١ ك ٢ ك ٢ ك ٢ ك ٢ ك]

⑧ $\frac{f}{\sin} = (1 - \sin)$ \dots
 [٢ ط \sin ك ٢ ط \sin ك ٢ ط \sin ك ٢ ط \sin]

$$\begin{array}{ll} \textcircled{5} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 & \textcircled{6} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 \\ \textcircled{7} \text{ ص} = \text{س}^2 \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 + 10 & \textcircled{8} \text{ ص} = \text{س}^2 \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 + 5 \\ \textcircled{9} \text{ ص} = \frac{\text{طا} \text{ س}}{\text{س}} & \textcircled{10} \text{ ص} = \frac{\text{س}}{\text{ها} \text{ س}} \\ \textcircled{11} \text{ ص} = \frac{\text{س}^2 + \text{س} \text{ ها} \text{ س}}{\text{ها} \text{ س}} & \textcircled{12} \text{ ص} = \frac{\text{ها} \text{ س}}{1 + \text{ها} \text{ س}} \end{array}$$

٢ أوجد المشتقة الأولى للنوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س} (\text{ها} \text{ س}^2 + \text{ها} \text{ س}) & \textcircled{2} \text{ ص} = \text{قا} \text{ س}^2 - 1 \\ \textcircled{3} \text{ ص} = \text{س}^2 + \text{س} + 5 \text{ ها} \text{ س} & \textcircled{4} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س} + \text{س} \\ \textcircled{5} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س} & \textcircled{6} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س}^2 + 5 \\ \textcircled{7} \text{ ص} = \text{ها} \left(\frac{1}{\text{س}} \right) & \textcircled{8} \text{ ص} = \text{ها}^2 (\text{س}^2 + 3) \\ \textcircled{9} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س}^2 & \textcircled{10} \text{ ص} = 4 \text{ ها} \text{ س}^4 \\ \textcircled{11} \text{ ص} = \text{ها}^2 \left(\frac{\text{س}}{1 + \text{س}} \right) & \textcircled{12} \text{ ص} = \text{ها} (\text{ها} \text{ س}) \end{array}$$

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = 12 + \text{ها} \text{ س}^2 & \textcircled{2} \text{ ص} = 2 \text{ س}^2 - \text{ها} \text{ س}^3 \\ \textcircled{3} \text{ ص} = 1 \text{ ها} \text{ س} + \text{ها} \text{ س} & \textcircled{4} \text{ ص} = 12 \text{ ها} (5 \text{ س}) \end{array}$$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} & \textcircled{2} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} \\ \textcircled{3} \text{ ص} = \frac{\text{طا} \text{ س} + \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} \text{ طا} \text{ س} - 1} & \textcircled{4} \text{ ص} = \frac{2 \text{ طا} \text{ س}}{\text{طا} \text{ س}^2 - 1} \end{array}$$

① $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ يساوي
 [٢ د ٢ - د ٢ د ٢ د ٢]
 ② $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ يساوي
 [١ د ١ - د ١ د ١ د ١ د ١]

١١. قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى كل من الدوال الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبيّنة:

① $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ يساوي
 [٢٠ د ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥]
 ② $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عند النقطة (π, π) يساوي
 [٣٠ د ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥]
 ③ $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ يساوي
 [٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ د ١٨٠]
 ④ $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عند النقطة $(1, \frac{\pi}{4})$ يساوي
 [٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ د ١٨٠]

١٢. ألب أن المماس للمنحنى $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{4}$

١٣. إذا كانت $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ فأوجد $\frac{d\theta}{dx}$
 ١٤. إذا كانت $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ فأوجد $\frac{d\theta}{dx}$
 ١٥. إذا كانت $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ فأوجد $\frac{d\theta}{dx}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$
 ١٦. أوجد $\frac{d\theta}{dx}$ إذا كانت $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$
 ١٧. إذا كانت $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$ فأوجد $\frac{d\theta}{dx}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$

أوجد د (صفر)

$$\frac{\text{ما من}}{\text{ما من} + 1} = (س)$$

[7]

أوجد و في كل مما يلي.

[7-]

$$\textcircled{1} س = \frac{\pi}{4} (ع - 1) ع = ع = 2 س عند س = \pi$$

[1-]

$$\textcircled{2} س = \frac{\pi}{4} (1 + ع) ع = \frac{1}{4} ع = 2 س عند س = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ إذا كانت } س = \text{ما}^2 س - \text{ما}^2 س = \frac{و}{س} = 2 س$$

$$\textcircled{4} \text{ إذا كانت } س = (\text{ما} س + \text{ما} س) = \frac{و}{س} = 2 س$$

$$\textcircled{5} \text{ إذا كانت } س = 2 س = \text{ما} س$$

$$\text{فأثبت أن } \frac{و}{س} = \text{ما}^2 س + 2 س = 2 س$$

$$\textcircled{6} \text{ إذا كانت } س = \frac{\text{ما} س}{\text{ما} س + 1} \text{ فأثبت أن } \frac{و}{س} = \frac{1}{\text{ما} س + 1}$$

$$\textcircled{7} \text{ إذا كانت } س = \frac{\text{ما} س}{\text{ما} س + 1} \text{ فأثبت أن } (1 + \text{ما} س) \frac{و}{س} = 1$$

$$\textcircled{8} \text{ إذا كانت } س = 3 س أوجد معدل تغير من بالنسبة إلى س عندما س = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{9} \text{ إذا كانت } س = 4 س أوجد معدل تغير من بالنسبة إلى س عندما س = \frac{\pi}{4}$$

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

$$\textcircled{1} \text{ إذا كان } س = \frac{2 ط س}{1 - ط س} \text{ فإن } \frac{و}{س} = \dots\dots\dots$$

$$[ط س \text{ هـ } 2 ط س \text{ هـ } 2 ط س \text{ هـ } 2 ط س]$$

$$\textcircled{2} \frac{و}{س} (2 س + 2 س) = \dots\dots\dots$$

$$[2 س + 2 س \text{ هـ } 2 س + 2 س \text{ هـ } 2 س]$$

تطبيقات على المشتقات

الدرس

٦

تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله ونقطة تقع عليه لذلك يجب أن نتذكر العلاقة بين ميلين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

🎯 **مثال ١:** إذا كانت الدالة $y = x^2$ فماذا يكون ميل المماس عند النقطة $(1, 1)$ ؟

ميل المماس لنحنى عند أى نقطة $(س, ع)$ الواقعة عليه هو المشتقة الأولى لدالة هذا التحنى حيث $س = د$ (س)

أى أن

ميل المماس للمحنى $س = د$ (س) عند النقطة

$(س_١, ع_١)$ الواقعة عليه $= \left[\frac{د}{دس} \right] (س_١, ع_١)$

ويكون $طا = \left[\frac{د}{دس} \right] (س_١, ع_١)$

حيث $د$ قياس الزاوية الموجبة التقى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور الصادات.



ملاحظات عامة

إذا كان ℓ_1 ، ℓ_2 ميلين مستقيمين معلومين ℓ_1 ، ℓ_2 فإن ،
 $\ell_1 \parallel \ell_2$ إذا فقط إذا كان $m_1 = m_2$ (شرط التوازي)
 $\ell_1 \perp \ell_2$ إذا فقط إذا كان $m_1 m_2 = -1$ (شرط التعامد)

ونستنتج من ذلك أن

$$\text{ميل العمودي على المنحنى } m = -d(s) \text{ عند النقطة الواقعة عليه } = \frac{1}{\left[\frac{ds}{ds} \right] (s_1, s_2)}$$

معادلة المماس والعمودي على المنحنى

إذا كانت (s_1, s_2) نقطة تقع على منحنى الدالة d حيث $s = d(s)$ ، m ميل المماس عند هذه النقطة فإن

① معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (s_1, s_2)

$$\text{هي: } m - s_1 = m(s - s_1)$$

② معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة (s_1, s_2)

$$\text{هي: } m - s_1 = \frac{1}{m} (s - s_1)$$

تطبيق

إذا كان المماس يصنع زاوية موجبة قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المماس = $\tan \theta$

③ إذا كان المماس يوازي المستقيم q $s + b + s + d = 0$

فإن ميل المماس = ميل المستقيم المعطى = $\frac{-\text{معامل } s}{\text{معامل } s}$ أي أن $\frac{ds}{ds} = \frac{b}{d}$

أما إذا كان المماس عمودي على هذه المستقيم فإن ميل المماس = $\frac{\text{معامل } s}{\text{معامل } s} = \frac{b}{d}$

④ إذا كان المماس يوازي محور السينات فإن ميل المماس = صفر

⑤ إذا كان المماس يوازي محور الصادات فإن ميل المماس غير معروف أي أن مقام ميل المماس = صفر

المستقيم الذي يمر بالمقطعين (س_١، س_٢)، (س_٣، س_٤)، (س_٥، س_٦)، (س_٧، س_٨)، (س_٩، س_{١٠})، (س_{١١}، س_{١٢})، (س_{١٣}، س_{١٤})، (س_{١٥}، س_{١٦})، (س_{١٧}، س_{١٨})، (س_{١٩}، س_{٢٠})، (س_{٢١}، س_{٢٢})، (س_{٢٣}، س_{٢٤})، (س_{٢٥}، س_{٢٦})، (س_{٢٧}، س_{٢٨})، (س_{٢٩}، س_{٣٠})، (س_{٣١}، س_{٣٢})، (س_{٣٣}، س_{٣٤})، (س_{٣٥}، س_{٣٦})، (س_{٣٧}، س_{٣٨})، (س_{٣٩}، س_{٤٠})، (س_{٤١}، س_{٤٢})، (س_{٤٣}، س_{٤٤})، (س_{٤٥}، س_{٤٦})، (س_{٤٧}، س_{٤٨})، (س_{٤٩}، س_{٥٠})، (س_{٥١}، س_{٥٢})، (س_{٥٣}، س_{٥٤})، (س_{٥٥}، س_{٥٦})، (س_{٥٧}، س_{٥٨})، (س_{٥٩}، س_{٦٠})، (س_{٦١}، س_{٦٢})، (س_{٦٣}، س_{٦٤})، (س_{٦٥}، س_{٦٦})، (س_{٦٧}، س_{٦٨})، (س_{٦٩}، س_{٧٠})، (س_{٧١}، س_{٧٢})، (س_{٧٣}، س_{٧٤})، (س_{٧٥}، س_{٧٦})، (س_{٧٧}، س_{٧٨})، (س_{٧٩}، س_{٨٠})، (س_{٨١}، س_{٨٢})، (س_{٨٣}، س_{٨٤})، (س_{٨٥}، س_{٨٦})، (س_{٨٧}، س_{٨٨})، (س_{٨٩}، س_{٩٠})، (س_{٩١}، س_{٩٢})، (س_{٩٣}، س_{٩٤})، (س_{٩٥}، س_{٩٦})، (س_{٩٧}، س_{٩٨})، (س_{٩٩}، س_{١٠٠})، (س_{١٠١}، س_{١٠٢})، (س_{١٠٣}، س_{١٠٤})، (س_{١٠٥}، س_{١٠٦})، (س_{١٠٧}، س_{١٠٨})، (س_{١٠٩}، س_{١١٠})، (س_{١١١}، س_{١١٢})، (س_{١١٣}، س_{١١٤})، (س_{١١٥}، س_{١١٦})، (س_{١١٧}، س_{١١٨})، (س_{١١٩}، س_{١٢٠})، (س_{١٢١}، س_{١٢٢})، (س_{١٢٣}، س_{١٢٤})، (س_{١٢٥}، س_{١٢٦})، (س_{١٢٧}، س_{١٢٨})، (س_{١٢٩}، س_{١٣٠})، (س_{١٣١}، س_{١٣٢})، (س_{١٣٣}، س_{١٣٤})، (س_{١٣٥}، س_{١٣٦})، (س_{١٣٧}، س_{١٣٨})، (س_{١٣٩}، س_{١٤٠})، (س_{١٤١}، س_{١٤٢})، (س_{١٤٣}، س_{١٤٤})، (س_{١٤٥}، س_{١٤٦})، (س_{١٤٧}، س_{١٤٨})، (س_{١٤٩}، س_{١٥٠})، (س_{١٥١}، س_{١٥٢})، (س_{١٥٣}، س_{١٥٤})، (س_{١٥٥}، س_{١٥٦})، (س_{١٥٧}، س_{١٥٨})، (س_{١٥٩}، س_{١٦٠})، (س_{١٦١}، س_{١٦٢})، (س_{١٦٣}، س_{١٦٤})، (س_{١٦٥}، س_{١٦٦})، (س_{١٦٧}، س_{١٦٨})، (س_{١٦٩}، س_{١٧٠})، (س_{١٧١}، س_{١٧٢})، (س_{١٧٣}، س_{١٧٤})، (س_{١٧٥}، س_{١٧٦})، (س_{١٧٧}، س_{١٧٨})، (س_{١٧٩}، س_{١٨٠})، (س_{١٨١}، س_{١٨٢})، (س_{١٨٣}، س_{١٨٤})، (س_{١٨٥}، س_{١٨٦})، (س_{١٨٧}، س_{١٨٨})، (س_{١٨٩}، س_{١٩٠})، (س_{١٩١}، س_{١٩٢})، (س_{١٩٣}، س_{١٩٤})، (س_{١٩٥}، س_{١٩٦})، (س_{١٩٧}، س_{١٩٨})، (س_{١٩٩}، س_{٢٠٠})، (س_{٢٠١}، س_{٢٠٢})، (س_{٢٠٣}، س_{٢٠٤})، (س_{٢٠٥}، س_{٢٠٦})، (س_{٢٠٧}، س_{٢٠٨})، (س_{٢٠٩}، س_{٢١٠})، (س_{٢١١}، س_{٢١٢})، (س_{٢١٣}، س_{٢١٤})، (س_{٢١٥}، س_{٢١٦})، (س_{٢١٧}، س_{٢١٨})، (س_{٢١٩}، س_{٢٢٠})، (س_{٢٢١}، س_{٢٢٢})، (س_{٢٢٣}، س_{٢٢٤})، (س_{٢٢٥}، س_{٢٢٦})، (س_{٢٢٧}، س_{٢٢٨})، (س_{٢٢٩}، س_{٢٣٠})، (س_{٢٣١}، س_{٢٣٢})، (س_{٢٣٣}، س_{٢٣٤})، (س_{٢٣٥}، س_{٢٣٦})، (س_{٢٣٧}، س_{٢٣٨})، (س_{٢٣٩}، س_{٢٤٠})، (س_{٢٤١}، س_{٢٤٢})، (س_{٢٤٣}، س_{٢٤٤})، (س_{٢٤٥}، س_{٢٤٦})، (س_{٢٤٧}، س_{٢٤٨})، (س_{٢٤٩}، س_{٢٥٠})، (س_{٢٥١}، س_{٢٥٢})، (س_{٢٥٣}، س_{٢٥٤})، (س_{٢٥٥}، س_{٢٥٦})، (س_{٢٥٧}، س_{٢٥٨})، (س_{٢٥٩}، س_{٢٦٠})، (س_{٢٦١}، س_{٢٦٢})، (س_{٢٦٣}، س_{٢٦٤})، (س_{٢٦٥}، س_{٢٦٦})، (س_{٢٦٧}، س_{٢٦٨})، (س_{٢٦٩}، س_{٢٧٠})، (س_{٢٧١}، س_{٢٧٢})، (س_{٢٧٣}، س_{٢٧٤})، (س_{٢٧٥}، س_{٢٧٦})، (س_{٢٧٧}، س_{٢٧٨})، (س_{٢٧٩}، س_{٢٨٠})، (س_{٢٨١}، س_{٢٨٢})، (س_{٢٨٣}، س_{٢٨٤})، (س_{٢٨٥}، س_{٢٨٦})، (س_{٢٨٧}، س_{٢٨٨})، (س_{٢٨٩}، س_{٢٩٠})، (س_{٢٩١}، س_{٢٩٢})، (س_{٢٩٣}، س_{٢٩٤})، (س_{٢٩٥}، س_{٢٩٦})، (س_{٢٩}

مثان

لوجد النقطه التي تقع على المنحنى $s = 3 - 4s + 2$ والتي بعدها ميل
المماس للمنحنى يساوي 4

الحل

وہیں ۳۴ - ۱

$$2 + 3 - 4 = 1$$

$$1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$f_s = \frac{F_s}{W_s} = \text{ميل المماس} ;$$

١٠٠ - ١٠٠

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

$$b = \bar{r} + (1 - \bar{r}) \frac{1}{\bar{r}} = 1$$

مکتبہ سنی = ۹-

$$1 = 7 + (1)4 - 7(1) = 0 \therefore$$

عندما $\mu = 1$

١٠. البقعة هي: $(-1, 0) \cup (0, 1)$

مثال

يؤيد النقط الواقعة على منحنى الدالة من $x = 3$ - $x = 1$ - $x = 0$ والقي يكون تماس عليها موازياً لمحور السينات.

الحل

$$1 - 2 - 3 = \frac{1}{2} \therefore$$

$$ص = ص ۴ - ص ۳ - ص ۲ - ص ۱$$

$$A_1 = \frac{F_{\text{مس}}}{F_{\text{مسر}}} = \text{مقدار}$$

• الماس یوانی محورالسیقات

$$\therefore \text{من } 2 - 1 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = -1 \text{ من } 3 = -1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = -1 \text{ من } 3 = -1$$

$$\therefore (1 + 2) = 3 \text{ من } 3 = 3$$

(وبالتعويض في معادلات الملاحظين)

$$\text{عندما } 1 =$$

$$\text{عندما } 3 =$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = -1 \text{ من } 3 = -1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = -1 \text{ من } 3 = -1$$

$$\therefore \text{النقط هي } (1, 3) \text{ و } (3, 1)$$

مثال ٢

أوجد البعد الواقع على منحنى الدالة $z = 3 + 2x - 1y$ والتي يكون عندها المماس:

$$1 \text{ موازيًا للمستقيم } y = 7 - x$$

$$2 \text{ عموديًا على المستقيم } z = 3 + 2x - 1y$$

الحل

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$1 \therefore \text{المماس موازيًا للمستقيم } y = 7 - x$$

.. ميل المماس = ميل المستقيم

$$1 = \frac{7 - x}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$\therefore \text{النقط هي } (1, 3) \text{ و } (3, 1)$$

$$2 \therefore \text{المماس عمودي على المستقيم } z = 3 + 2x - 1y \text{ ، ميل المستقيم } = \frac{1}{2}$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

$$z = 3 + 2x - 1y$$

نجد انقطة تقاطع على المحاور

∴ س = ٠ ، (بالنعويض في معادلة المنحنى)
 ∴ ص = ١ - ٠ + ٠ = ١

∴ س = ٢
 عندما س = ٠

∴ النقطة هي (١، ١)

مثال

أوجد النقطة الواقعة على المنحنى $\frac{2-s}{1-s}$ والتي عندها المماس للمنحنى موازياً للمستقيم $s = 4 + s$

الحل

$$\frac{2-s}{1-s} = \frac{4+s}{1-s}$$

$$\frac{2-s}{1-s} = \frac{4+s}{1-s}$$

المماس يوازي المستقيم $s = 4 + s$
 ∴ ميل المماس للمنحنى = ميل المستقيم - معامل س بعد ترتيب المعادلة

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1-s} \\ 1 &= \frac{1}{1-s} \\ 1 &= 1-s \\ 0 &= -s \\ s &= 0 \end{aligned}$$

∴ النقطة هي (٢، ٠) ، (٠، ٢)

مثال

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $\frac{3+s}{1+s}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتي إحداثيها السيني = ١ ، هل النقطة (٤، ٣) تقع على المماس؟

الحل

$$\frac{3+s}{1+s} = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

∴ النقطة (٢، ١) تقع على المنحنى

$$\frac{3 - س - 1 + س}{2(1 + س)} = \frac{1 \times (3 + س) - 1 \times (1 + س)}{2(1 + س)} = \frac{1 - س}{2(1 + س)}$$

$$\frac{2 - س}{2(1 + س)} = \frac{1 - س}{2(1 + س)}$$

(ميل المماس)

$$2 = \frac{1 - س}{2} = \frac{2 - س}{2(1 + س)} = (2, 1) \left[\frac{1 - س}{2} \right] \therefore$$

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot 2$$

معادلة المماس هي

$$(س - 1) = (2 - س) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 - س = 1 - س$$

$$\boxed{1 = 2 - س}$$

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot \frac{1}{2}$$

معادلة العمودي هي

$$(س - 1) = (2 - س) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 - س = 2 - س$$

$$\therefore 2 - س = 2 - س$$

$$\boxed{1 = 2 - س}$$

بالتعويض بالنقطة $(-3, 4)$ في معادلة المماس

\therefore النقطة $(-3, 4)$ تنتمي لمعادلة المماس

$$\therefore 4 = 2 + (-3) = -1$$

مثال

أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى $س = 2$ من عند النقطة $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

الحل

$$\therefore \frac{دس}{دس} = \frac{دس}{دس} = 2 \times س = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore س = 2 \times س = 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{دس}{دس} = 2 - س = 2 - 2 = 0$$

$$1 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \times 2 + \left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{دس}{دس} \right]$$

ميل المماس (2)

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot 2$$

معادلة المماس هي

$$\therefore s = s$$

$$s - \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - s \right)$$

معادلة العمودي هي $(s - s_1) = (s_2 - s_1)$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = s + s$$

$$s - \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - s \right)$$

مثال

أوجد قيمة s التي تجعل المساحة المثلثية بين المماس للمنحنى $s = s^2 + s + 1$ عند النقطة $(1, 3)$ الواقعة عليه يساوي 5

الحل

النقطة $(1, 3)$ تقع على المنحنى $s = s^2 + s + 1$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

ميل المماس للمحنى عند أي نقطة عليه $\frac{ds}{ds} = 2s + 1$

$$3 = 1$$

$$5 = 1 + 1 + 1$$

$$\therefore \left[\frac{ds}{ds} \right]_{(1, 3)} = 3$$

$$1 = s$$

$$3 = 1 + 1 + 1$$

بالتعويض في المعادلة (3) عن قيمة s

مثال

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمحنى $s = \frac{1}{s}$ (حيث $s > 0$) عند أي نقطة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوي 2 وحدة مربعة

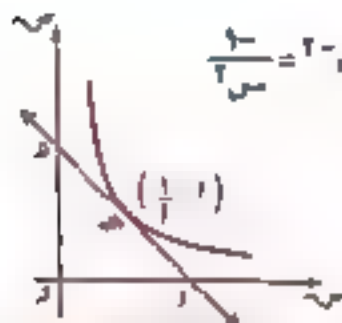
الحل

$$\therefore s = \frac{1}{s} \Rightarrow s^2 = 1$$

نفرض أن $s = 1$

النقطة هي $\left(\frac{1}{s}, 1 \right)$ على المنحنى

$$\left[\frac{ds}{ds} \right]_{\left(\frac{1}{s}, 1 \right)} = \frac{1}{s^2}$$



معادلة المماس عند θ هي: $(\cos \theta - \sin \theta) x + (\sin \theta + \cos \theta) y = 2$

$$\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{1} = 1 \quad (\sin \theta - 1)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

(معادلة المماس عند θ)

$$1 = 1 - \sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس θ مع محور الصادات نضع $\sin \theta = 0$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos \theta = \pm 1$$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي $(0, 2)$

$$\sin \theta = 0$$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس θ مع محور السينات نضع $\cos \theta = 0$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 \quad \therefore \sin \theta = \pm 1$$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي $(2, 0)$

$$\cos \theta = 0$$

مساحة Δ المطلوب $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ وحدة مربعة

مثال

أوجد مساحة سطح المنحنى المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمماس عند النقطة $(-1, 2)$

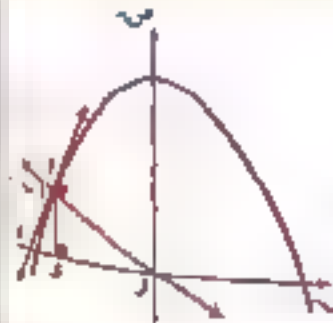
الحل

$$\therefore \cos \theta = -1 \quad \sin \theta = 2$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{-1}{2} \quad \therefore \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{1}{-1/2} = -2 \quad \therefore \text{المماس عند النقطة } (-1, 2)$$

$$\text{معادلة المماس عند النقطة } (-1, 2) \text{ هي } (2 - \sin \theta) x + (1 + \cos \theta) y = 2$$



$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + \text{ص} \quad \therefore 2 \text{ ص} - 2 = 5 + \text{ص} \quad \therefore \text{ص} = 5$$

لايجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع $\text{ص} = 0$

$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + \text{ص} \quad \therefore \text{ص} = 5$$

معادلة العمودي عند النقطة $(1, 2)$ هي:

$$(2 - \text{ص}) = (1 + \text{ص})$$

$$2 \text{ ص} - 2 = 1 + \text{ص} \quad \therefore \text{ص} = 3$$

لايجاد نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات نضع $\text{ص} = 0$

$$2 \text{ ص} - 2 = 1 + \text{ص} \quad \therefore \text{ص} = 3$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ المطلوب} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 = 7.5 \text{ وحدات مربعة}$$

مثال

إذا كان المماس للمنتحن $\text{ص} = 1 - 2 \text{ ص}^2$ عند النقطة $(-1, 1)$ يعبر
المنتحن عند نقطة أخرى ب فأوجد معادلة المماس عند ب

الحل

$$\therefore \text{ص} = 1 - 2 \text{ ص}^2 \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ص}} = -4 \text{ ص} \quad \therefore \frac{d\text{ص}}{d\text{ص}} = -4 \text{ ص}$$

$$\text{ميل المماس} = \left[\frac{d\text{ص}}{d\text{ص}} \right]_{(-1, 1)} = -4(-1) = 4$$

معادلة المماس للمنتحن عند النقطة $(-1, 1)$ هي:

$$\frac{\text{ص} - 1}{1 - (-1)} = -4 \quad \Rightarrow \text{ص} - 1 = -4(1 - (-1))$$

لايجاد نقطة تقاطع المماس مع المنتحن:

$$\text{ص} = 1 - 2 \text{ ص}^2 \quad \text{ص} - 1 = -4(1 - (-1))$$

$$1 - 2 \text{ ص}^2 - 1 = -4(1 - (-1))$$

$$-2 \text{ ص}^2 = -4(1 - (-1))$$

$$\therefore \text{ص} = 1 \quad \therefore \text{ص} = 1$$

$$(1 - 2 \text{ ص}^2) = 1 - 2(1)^2 = -1$$

$$\begin{aligned}
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{عندما س } 1 = 1 \\
 & \text{عندما س } 1 = 1 \\
 & \therefore \frac{1}{1} = 1 \\
 & \text{مبين لماس } = \frac{1}{1} = 1 \\
 & \text{معادلة العمودي عند النقطة (1, 1) هي:} \\
 & (1 - 1) = (1 - 1) \\
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{س } 1 = 1
 \end{aligned}$$

الاسم:
التاريخ:

أجوبة الاختبار

اختبار

الاسم:
التاريخ:



1. يجب على الطالب أن يجيب على الأسئلة التالية:

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$

[عاش - عاشا في عاشا - عاشا في عاشا]

[عاشا + عاشا في عاشا - عاشا في عاشا]

2. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$

[عاشا + عاشا في عاشا + عاشا في عاشا + عاشا في عاشا]

4. معدل تغير س + 2 + 3 بالنسبة إلى س عندما س = 2

[7 في 4 في 3 في 2 في 1 في 0]

5. إذا كانت س = 2 + 3 + 4 + 5 = 14

فاوجد: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{4}$

6. صممة على شكل مربع تنكش بالتبريد محفظة بشكلها المربع

أحسب معدل التغير في مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما

يكون طول الضلع 8 م

مسائل المستوى الأول

١. اختر الإجابة الصحيحة من بين بدائل المعطاة .

١. ميل المماس لمنحنى الدالة d حيث $s = d(s)$ عند أي نقطة عليه هو

[$\frac{ds}{ds}$ $\frac{ds}{ds}$ $\frac{ds}{ds}$ $\frac{ds}{ds}$]

٢. ميل المماس للمنحنى $s = (2 - s)^2$ عندما $s = 1$ هو

[0 1 2 3]

٣. ميل المماس للمنحنى $s = \frac{5}{1-s}$ عندما $s = 0$ هو

[1 2 3 4]

٤. ميل المماس للمنحنى $s = \frac{\pi}{4}$ عندما $s = \frac{\pi}{4}$ يساوي

[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1]

٥. ميل العمودي للمنحنى $s = 2 - s$ عندما $s = \frac{\pi}{4}$ يساوي

[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1]

٦. ميل العمودي للمنحنى $s = 2 - s$ عند النقطة التي تقع على المنحني

وإحداثياتها السينية $\frac{\pi}{4}$ يساوي

[1 2 3 4]

٧. إذا كان المستقيم $s = 2 - s$ مماساً لمنحنى الدالة d عند النقطة التي

إحداثياتها السينية 2 فإن $d'(2) = \dots\dots\dots$

[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1]

٨. إذا كان المستقيم $s = 3 - s$ مماساً لمنحنى الدالة d عند النقطة $(2, 1)$ فإن $d'(3) = \dots\dots\dots$

[1 2 3 4]

٩. إذا كان المستقيم $s = 2 - s$ مماساً على منحنى الدالة d عند النقطة $(2, 1)$ فإن $d'(1) = \dots\dots\dots$

[$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1]

١٠. المماس للمنحنى $s = (3 - s)^2$ عند النقطة $(2, 1)$ يصنع مع الإصبع

الموجب محور السينات زاوية موجبة ظلها $\dots\dots\dots$

[1 2 3 4]

١١) المماس للمنحنى $(س + ص) = ٧$ عند النقطة $(١٤, ٠)$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها =

[١٥° د ١٠° د ١٣٥° د ١٦٠° د ١٩٥° د]

١٢) ميل المماس للمنحنى $س - ص = ٣$ عند $س = ٣$ هو

[٦ د ٩ د ٣ د ٣- د ٣-]

١٣) ميل العمودي للمنحنى $س = ص$ عند $س = ٢$ هو

[١ د ١- د ١/٢- د ١- د ١٠ د]

١٤) معادلة المماس للمنحنى $س = (س - ١)²$ عند النقطة $(١٤, ٧)$ هي

[$س = ١ - س - ٣$ د $س = س - ٢$ د $س = ٢ - س - ٣$ د $س = ٢ = س - ٢$ د]

ثانياً مسائل المستوى الثاني

٣١) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $س = ٢ + \frac{١}{س} - ١$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند $س = ١$ [٢٥°]

٣٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $س = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(٣, ٤)$ [١٥°، ١٦٠°، ١٩٥°، ٢٠٠°]

٣٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $س = س(س - ١)(س + ١)$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نقطة الأصل. [١٣٥°]

٣٤) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها العمودي على المنحنى $س = ٢ + ٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(٣, ٥)$ لأقرب دقيقة. [١٨°، ٢٠°]

٣٥) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى $س = ٢$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(\pi, ٤)$ [١٣°، ١٩°]

٣٦) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة $س = ٣ + س - ١$ والتي يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوي ٦ [١١°، ١٣°، ١٥°، ١٧°]

٣٧) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $س = ٣ - ٢ - س + ١٥$ والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات. [١٠°، ١٢°، ١٤°، ١٦°]

١٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $s = 2 - 4s + 3$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 135° [135, 135]

١٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $s = 3 - 2s + 11s + 5$ والتي يكون عندها المماس:

- ① موازيًا للمستقيم $s + 2 = 0$
- ② عموديًا على المستقيم $s + 2 = 0$
- ③ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها 11

١٥) أوجد النقط الواقعة على منحنى لدالة $s = (3 - 2)s + 1$ والتي يكون عندها المماس يوازي المستقيم $s + 2 = 0$

١٦) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $s = \frac{2-s}{1-s}$ والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا للمستقيم $s + 1 = 0$

١٧) أوجد النقط الواقعة على منحنى لدالة $s = \frac{2-s}{1-s}$ والتي يكون عندها المماس عموديًا على المستقيم $s + 1 = 0$

١٨) إذا كان $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$ فأوجد النقط الواقعة على المنحنى $s = 2$ ما s ويكون المماس عنده يوازي المستقيم $s + 1 = 0$

١٩) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة $s = 3 + 2s + 1$ والتي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات حيث $s \in [\frac{\pi}{4}, 0]$

٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى في كل مما يأتي عند النقط المعطاة:

① $s = 2 - 4s + 3$ عند النقط التي إحداثياتها السينية 2

② $s = 1 + \frac{1}{s}$ عند النقط $(2, \frac{3}{2})$

③ $s = 2 + \frac{1}{s}$ عند النقط $(4, 4)$

④ $s = (s + 2)(s + 5)$ عند النقط $(-2, -6)$

⑤ $s = \frac{3+s}{1+s}$ عند النقط $(1, 2)$

⑥ $s = (3 - 2)s$ عند النقط $(2, 1)$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = x \quad (9)$$

١٢١ يوجد معادلة لعمودي على المنحني في كل مما يأتي عند المقتطع المعطاة.

(۷) مس = ۲ جا س + ۱ جا س

أوجد معادلة المماس لمتحنى الدالة $y = (x - 2)(x + 4)$ عند نقطتي تقاطعه

مع مرور السنين،

٢٤) اوجد معادلة المماس للمعنى الذي معادلته $x - y = 1$ عند نقطة تقاطعه مع

المستقيم في ٢٢ سن

أوجد معادلة العمودي على المماس $= (x - 6) + (y - 3) = 0$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم

www.elsevier.com/locate/jmb

٣٧ ﴿٣٧﴾ الَّذِينَ آمَنُوا بِالْغَيْبِ الْمَرْمُومِ لَمْ يَكُنْ لَهُمْ مِنَ اللَّهِ عَاقِبَةٌ ۖ إِنَّ الْغَيْبَ لَمَنْعُتٌ ۖ س = س ٦ + س ١ = عند النقطة (١٦١) يكون

صموداً على الماس المرسوم للمفحص من ٢ - ٣ عند نفس النقطة.

نلاحظ أن المعادلات الخمس التالية هي: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ عند أي نقطة عليه تعميل جزئية واحدة

على محور السينات ثم أوجد معادلتى المماس والعمودى للمماس عند النقطة $s = 1$

٢٤ أثبت أن المماس للمنحنى $\frac{y+1}{x-1} = 1$ عند أي نقطة على المنحنى يصنع الزاوية متفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢٥ أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة $y = 2x^2 + 3x + 1$ عند النقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

٢٦ إذا كان المنحنى $y = 3x^2 - 7x + 4$ يقطع محور السينات في النقطتين A و B أثبت أن المماسين عند A و B متعامدين.

٢٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى $y = x^2$ والتي يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة $(1, 4)$

٢٨ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى $y = x^2 - 6x + 13$ عند النقطة $(5, 4)$ الواقعة عليه

٢٩ إذا كان منحنى الدالة $y = (3-x)^2 + 3$ أوجد

- ١ معادلة المماس عند نقطة تقاطعه مع المحور الصادي.
- ٢ إحداثيي نقطة تقاطع هذا المماس مع المحور السيني.
- ٣ مساحة المثلث المحدد بهذا المماس ومحوري الإحداثيات.

٣٠ إذا كان المماس للمنحنى $y = \frac{4}{x}$ عند النقطة H في الربع الأول يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين M و N فأثبت أن مساحة $\triangle OMN$ ثابتة ولا تعتمد على موضع النقطة H الواقعة على منحنى الدالة.

٣١ إذا كان ميل المماس للمنحنى $y = \frac{4}{x+1}$ يساوي -8 عند النقطة $(-1, -4)$ أوجد قيمتي a و b

٣٢ إذا كان المنحنى $y = x^3 + 2x^2 + 8x + 5$ يمس المستقيم $y = 8x + 5$ عند النقطة $(-1, -3)$ فأوجد قيمتي a و b

٣٣ إذا كان المنحنى $y = (x^2 - 2x)(x + 1)$ يمس محور السينات عند النقطة $(1, 0)$ ويمس المستقيم $y = 2x$ عند نقطة الأصل فأوجد قيمتي a و b

٣٤١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ حيث $f'(x) = 1 + x^2 + x$ عند النقطة $(-1, 3)$ الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها 45° فأوجد قيمتي $f(-1)$ و $f(1)$ [٢٤١]

مسائل تقىس مستويات علمها في التفكر

٣٤٢) إذا كانت الدالة $y = f(x)$ حيث $f'(x) = 1 + x^2 + x$ عندما $x > 1$ عندما $x \leq 1$ فأبلة للإشتقاق عند $x = 1$ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة [٢٤٢]

٣٤٣) عى قيمة $f'(1) \geq 0$ التى تجعل محور السينات مماساً للمنحنى: $y = x^2 - x + 1 - x$ ثم عى نقطة التماس. [١٠١٣]

٣٤٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ حيث $f'(x) = \frac{x^2}{|x|}$ عند $x = 2$ [١٠١٤]

٣٤٥) أثبت أن المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ حيث $f'(x) = |x| - x$ عند النقطة $(2, 2)$ يوازى العمودى على منحنى الدالة عند نقطة $(-1, -1)$

٣٤٦) أثبت أن معادلة المماس للمنحنى $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ عند النقطة $(1, 1)$ الواقعة عليه هى $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}$

٣٤٧) أوجد معادلة العمودى للمنحنى $y = x^2 - 3x + 5$ عند كل من نقطتى تقاطع مع الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ [١٠١٥]

٣٤٨) أوجد قيمة $f'(1)$ التى تجعل المستقيم $y = x + 1$ مماساً للمنحنى $y = x^2 + 5$ [١٠١٦]

٣٤٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى: $y = x^2 + 2x - 1$ عند النقطة $(1, 2)$ [١٠١٧]

٣٥٠) إذا كانت $(3, \frac{\pi}{4})$ تقع على منحنى الدالة $y = f(x)$ حيث $f'(x) = x + 1$ وكانت معادلة المماس له عند هذه النقطة هى $y = x + 3$ فأوجد قيمتي $f(1)$ و $f(3)$ [١٠١٨]



التكامل

الاحترار

٧

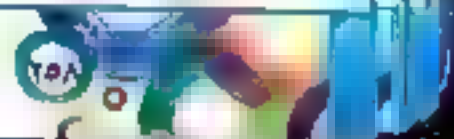
علما قبي سبق كيفية إيجاد المشتقة وإذا علمت الدالة وحيث $D'(x) = \frac{f}{x}$ و $D(x)$ وسوف نتناول في هذا الدرس العملية لعكسية لعملية الاشتقاق وهي المشتقة العكسية.

٣- تعريف المشتقة العكسية

إذا كانت الدالة المشتقة للدالة f هي $\frac{f}{x}$ فإن العملية العكسية لها وهي إيجاد f إذا علم $\frac{f}{x}$ تسمى إلى بسطة العكسية أو عكسية الخاص،

فمثلا إذا كانت $f = x^2$ فإن $\frac{f}{x} = 2x$ وإذا كانت $\frac{f}{x} = 2x$ فإن $f = x^2$

فإن المشتقة العكسية هي: x^2 أو x^3 أو x^4 أو x^5 أو x^6 أو x^7 أو x^8 أو x^9 أو x^{10} لأن جميع هذه الدوال مجموعة الدوال العكسية بدالة، تكون مشتقتها $f = x^2$ فمثلا فإذا مررنا للعدد الموجود بعد x^2 بالرمز ثيديل على هذا العدد الثابت فإن $f = x^2$ تكون مشتقتها $\frac{f}{x} = 2x$



... أن نحصل للمعروف التالي :

يقال أن الدالة f مشتقة عكسية للدالة g (إذا كانت $f'(x) = g(x)$ لكل x في مجال D)

مجموعة المشتقات العكسية للدالة f تسمى لتكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز $\int f(x) dx$ ويفرأ تكامل f نسبة إلى x

إذا كانت $f'(x) = g(x)$ فإن $\int g(x) dx = f(x) + C$ حيث C ثابت اختياري (ثابت التكامل)

أمثلة

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x \Rightarrow \int 2x dx = x^2 + 5 + C$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2 \Rightarrow \int 3x^2 dx = x^3 - 5 + C$$

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 2) = 4x^3 \Rightarrow \int 4x^3 dx = x^4 - 2 + C$$

ولتعين قيمة الثابت C يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير، مستقل x وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^3}$ هي مشتقة عكسية للدالة $g(x) = 3x^{-4}$ حيث $g'(x) = -12x^{-5}$

الحل

$$\text{نوجد مشتقة الدالة } f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4} = -3x^{-4}$$

أي أن الدالة $f(x) = \frac{1}{x^3}$ هي مشتقة عكسية للدالة $g(x) = 3x^{-4}$

س^٥ و س^٦ = $\frac{س^{٥+٦}}{١+٥}$ حيث ث ثابت ، ن عدد نسبي ، ن ≠ ٠
أي إذا نصيف للأص واحد ثم نقسم على الأص الجديد + ث

فمثلاً [س^٥ و س^٦ = $\frac{س^{٥+٦}}{١+٥}$ + ث = $\frac{١}{٦}$ س^٦ + ث]

وأيضاً [س^{-١} و س^{-٢} = $\frac{س^{-١-٢}}{١-٢}$ + ث = $\frac{١}{١}$ س^{-٢} + ث]

[ا و س = ا + س + ث حيث ا عدد حقيقي ثابت]

فمثلاً [٥ و س = ٥ + س + ث ، -٣ و س = -٣ + س + ث]

مثال ٢

تحقق من صحة كل مما يأتي :

١ [س^٥ و س^٦ = $\frac{١}{٦}$ س^٦ + ث] ٢ [$\frac{س}{٥ + س^٢} = س + \frac{س}{٥ + س^٢} + ث$]

الحل

١ $\frac{س^{٥}}{س^{٦}} = \frac{س^{٥+٦}}{١+٦} = \frac{١}{٦} س^{٦} = س + ث$

∴ [س^٥ و س^٦ = $\frac{١}{٦}$ س^٦ + ث]

٢ $\frac{س}{٥ + س^٢} = س + \frac{س}{٥ + س^٢} + ث$

∴ [$\frac{س}{٥ + س^٢} = س + \frac{س}{٥ + س^٢} + ث$]



مثال

- أوجد : ١) $\int \sin^4 x \, dx$ ٢) $\int \sin^6 x \, dx$
 ٣) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$ ٤) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

الحل

- ١) $\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx$
 $= \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$
 ٢) $\int \sin^6 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \cos^2 x) \, dx$
 $= \int \sin^4 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$
 ٣) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^4 x \, dx$
 ٤) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx$
 $= \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

خواص التكامل

إذا كان كل من u ، v دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن :

- ١) $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ حيث $u \in C^1$
 ٢) $\int [u \pm v] \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$

فمثلاً $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^4 x \, dx$

وأيضاً $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$

$= \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$

$= \int \sin^2 x \, dx + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx = \int 1 \, dx = x + C$

مثال

- أوجد: ① $\{ (3x^2 + x - 5) \}$ و ② $\{ (4x^2 + x + 3) \}$ و ③ $\{ (2x^2 - \frac{3}{x}) \}$ و ④ $\{ (x - 3)(x + 3) \}$ و ⑤ $\{ (x + 3)(x - 3) \}$

الحل

$$① \{ (3x^2 + x - 5) \}$$

$$= \{ 3x^2 + x - 5 \}$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \text{ث} = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \text{ث}$$

$$② \{ (4x^2 + x + 3) \}$$

$$= \{ 4x^2 + x + 3 \}$$

$$= \{ 4x^2 + x + 3 \}$$

$$= \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \text{ث}$$

$$= \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x + \text{ث}$$

$$③ \{ (2x^2 - \frac{3}{x}) \}$$

$$= \{ 2x^2 - \frac{3}{x} \}$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + \text{ث} = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + \text{ث}$$

$$④ \{ (x - 3)(x + 3) \}$$

$$= \{ (x^2 - 9) \}$$

$$= \frac{x^3}{3} - 9x + \text{ث} = \frac{x^3}{3} - 9x + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{4}س^2 - \frac{4}{3}س + 1 + س + 1 = \frac{1}{4}س^2 - \frac{1}{3}س + 2$$

$$\textcircled{2} \left[(س + \frac{3}{س})س^2 - (س + 2 + \frac{9}{س})س \right]$$

$$= [س^3 + س + 6س + 9] - [س^3 + 2س + 9س]$$

$$= \frac{س^3}{3} + \frac{6س}{1} + \frac{9س}{1} - \frac{س^3}{3} - 2س - 9س = 6س - 9س = -3س$$

$$\textcircled{3} \left[\frac{س^5 - 4س^2 + 2س}{س^2} + س - [س^2 + 4س] \right] = [س^3 - 4س + 2] - [س^2 + 4س]$$

$$= \frac{1}{4}س^4 - 4س^2 - 2س + 2$$

$$\textcircled{4} \left[\frac{س^3 + 8}{س + 2} - \frac{(س^2 - 2س + 4)(س + 2)}{(س + 2)} \right]$$

$$= [س^3 - 2س^2 + 4س + 8] - [س^3 + 2س^2 - 4س - 8]$$

$$= [س^3 - 2س^2 + 4س + 8] - [س^3 + 2س^2 - 4س - 8]$$

$$= \frac{1}{4}س^4 - 2س^2 - 4س + 8$$

مثال ١٢

أوجد: $\textcircled{1} [(4س - 3)س^3]$ $\textcircled{2} [4(س + 7)س^5 + 9]$ و $\textcircled{3} [(س - 3)(س^2 - 6س + 9)]$

$\textcircled{4} [\frac{س^6}{س^2(س + 9)}]$

الحل

$$\textcircled{1} [(4س - 3)س^3] = \frac{1}{4}س^4 - \frac{3}{4}س^3$$

$$= \frac{1}{4}س^4 - \frac{3}{4}س^3 + 2س^2 - 6س + 9 + 9 = \frac{1}{4}س^4 - \frac{3}{4}س^3 + 2س^2 - 6س + 18$$

$$\textcircled{2} \quad \left[\epsilon (7 + s + 6) + s \right]$$

$$= \left[\epsilon (7 + s + 6) + s \right] + 6 + s$$

$$= \left[\epsilon (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \epsilon + s + 6$$

$$= \left[\epsilon (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{3} \quad \left[\frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \epsilon + s + 6$$

$$= \left[\frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4} = \left[\frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{4} \quad \left[(3 - s) (3 - s) + s \right]$$

$$= \left[(3 - s) (3 - s) + s \right] + s$$

$$= \left[(3 - s) (3 - s) + s \right] + \frac{1}{4} = \left[(3 - s) (3 - s) + s \right] + \frac{1}{4}$$

مثال

أوجد، $\textcircled{1} \quad \left[s \left(\frac{3}{s} + 1 \right) + s \right]$ $\textcircled{2} \quad \left[s \left(\frac{3}{s} + 1 \right) + s \right]$

$\textcircled{3} \quad \left[s (2 + s) + s \right]$ $\textcircled{4} \quad \left[\frac{3 + s}{1 + s} + s \right]$

الحل

$$\textcircled{1} \quad \left[s \left(\frac{3}{s} + 1 \right) + s \right] = \left[s \left(\frac{3}{s} + 1 \right) + s \right] + s$$

$$= \left[s (2 + s) + s \right] + \frac{1}{4} = \left[s (2 + s) + s \right] + \frac{1}{4}$$

لاحظ ان

س = (س)^١

$$\textcircled{2} \quad \left| \text{س} \right| = \left| \frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \text{س} \left(\frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| \left[\left(\frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}} \right) \text{س} \right]^{\frac{1}{2}} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| (3 + 6) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}}}} = \frac{3}{\frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}}} + \text{ث}$$

$$= \frac{3}{\frac{3}{\text{س}} + \frac{6}{\text{س}}} + \text{ث} = \frac{3}{\frac{3 + 6\text{س}}{\text{س}}} + \text{ث} = \frac{3\text{س}}{3 + 6\text{س}} + \text{ث}$$

$$\textcircled{3} \quad \left| \text{س} (2 + \text{س}) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س} \quad \text{بإضافة ٢ وطرح ٢ من س}$$

$$= \left| (\text{س} + 2)(\text{س} - 2 + 2) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| (\text{س} + 2)(\text{س} - 2) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س} = \left| (\text{س} + 2)(\text{س} - 2) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| (\text{س} + 2)(\text{س} - 2) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\text{س} + 2)(\text{س} - 2)}} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^2 - 4}} + \text{ث}$$

$$\textcircled{1} \quad \left| \frac{3 + \text{س}}{\text{س} + 4} \right| \text{ و س} = \left| \frac{1 - (1 + 3 + \text{س})}{\frac{1}{\sqrt{4 + \text{س}}}} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{4 + \text{س}}}} - \frac{(4 + \text{س})}{\frac{1}{\sqrt{4 + \text{س}}}} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{4 + \text{س}}} - \frac{(4 + \text{س})}{\sqrt{4 + \text{س}}} \right| \text{ و س}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4 + \text{س}}} - \frac{(4 + \text{س})}{\sqrt{4 + \text{س}}} = \frac{1 - (4 + \text{س})}{\sqrt{4 + \text{س}}} = \frac{-3 - \text{س}}{\sqrt{4 + \text{س}}} + \text{ث}$$

مثال ٨

أوجد :

- ① $\int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} dx$
- ② $\int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$
- ③ $\int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$
- ④ $\int \frac{1}{(x^2+25)^2} dx$

الحل

① $\int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} dx$

دعونا $u = 1+x^4$ ، $du = 4x^3 dx$ ، $x^3 dx = \frac{1}{4} du$

∴ $\int \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+x^4} + C$

② $\int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$ ، $u = x^2+4$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

دعونا $u = x^2+4$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

∴ $\int \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+4)} + C$

③ $\int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$ ، $u = x^2+9$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

دعونا $u = x^2+9$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

∴ $\int \frac{1}{(x^2+9)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+9)} + C$

④ $\int \frac{1}{(x^2+25)^2} dx$ ، $u = x^2+25$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

دعونا $u = x^2+25$ ، $du = 2x dx$ ، $x dx = \frac{1}{2} du$

∴ $\int \frac{1}{(x^2+25)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2u} + C = -\frac{1}{2(x^2+25)} + C$

$= -\frac{1}{2(x^2+25)} + C$

- ١] $ها س و س = - هتا س + ث$
٢] $ها س و س = هتا س + ث$
٣] $قا^2 س و س = طا س + ث$
حيث ث ثابت اختياري

ملاحظة هامة

- ١] $ها (ا س + ب) و س = - \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$
٢] $ها (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$
٣] $قا^2 (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} طا (ا س + ب) + ث$
حيث ث ثابت اختياري

لنمثلاً] $(س - ها س) و س = \frac{1}{ب} س + هتا س + ث$

وأيضاً] $(ا هتا س + \frac{1}{ب} س + ث) و س$

$= (ا هتا س + قا^2 س + ث) و س = ا هتا س + طا س + ث$

كما أن] $ها (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$

ملاحظة هامة

- ١] $ها^2 س + ها س = 1$
٢] $ها س + 1 = طا س = قا^2 س$
٣] $ها^2 س - ها س = هتا س = ٢ س$
٤] $٢ - ها س = هتا س = ٢ س$
٥] $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$
٦] $٢ هتا س = ١ - هتا س = ٢ س$
٧] $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$
٨] $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$

ملاحظة هامة

$\frac{س}{و س} [د (س) و س = د (س) و س]$ $\frac{س}{و س} [د (س) و س = د (س) و س]$

مثال

- أوجد،
 ① $\{ (س^2 + ها س) و س \}$ ② $\{ (ها س + ٣) و س \}$
 ③ $\{ (٣ س - قا^٢ س) و س \}$ ④ $\{ (ها ٢ س + قا^٢ س) و س \}$

الحل

- ① $\{ (س^2 + ها س) و س \} = \frac{1}{٣} س^٣ + ها س + ث$
 ② $\{ (ها س + ٣) و س \} = ٥ - ها س + ٣ س + ث$
 ③ $\{ (٣ س - قا^٢ س) و س \} = \frac{٣}{٣} س^٣ - طا س + ث$
 ④ $\{ (ها ٢ س + قا^٢ س) و س \} = -\frac{1}{٣} ها س + \frac{1}{٣} طا س + ث$

مثال

أوجد،

- ① $\{ ها (١ + \frac{س}{٣}) و س \}$ ② $\{ ها (٥ س - ٣) و س \}$
 ③ $\{ (ها^٢ س + ها^٢ س) و س \}$ ④ $\{ (١ + طا^٢ س) و س \}$

الحل

- ① $\{ ها (١ + \frac{س}{٣}) و س \} = ٢ - ها (١ + \frac{س}{٣}) + ث$ **ملاحظة**
 ② $\{ ها (٥ س - ٣) و س \} = \frac{1}{٥} ها (٥ س - ٣) + ث$
 ③ $\{ (ها^٢ س + ها^٢ س) و س \} = ١ و س = س + ث$
 ④ $\{ (١ + طا^٢ س) و س \} = قا^٢ س و س = طا س + ث$

مثال ١١

أوجد:

- ١) $\{ (x^2 + 2x) \sin x \}$
- ٢) $\left\{ \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 2x} \right\}$
- ٣) $\{ (2x^2 + 2x) \sin x \}$
- ٤) $\left\{ \left(2x^2 + 2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin x \right\}$

الحل

ملاحظة:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sin x &= 2x^2 \sin x \\ 2x^2 \sin x + 2x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \{ (x^2 + 2x) \sin x \} &= \\ \{ (x^2 \sin x + 2x \sin x) \} &= \\ \{ (x^2 \sin x + 2x \sin x) \} &= \end{aligned}$$

$$\{ (1 + 2x) \sin x \} = \sin x + 2x \sin x$$

$$2) \left\{ \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 2x} \right\} = \sin x \left\{ \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 2x} \right\}$$

$$= \sin x \left\{ \frac{(x^2 + 2x) \sin x}{(x^2 + 2x)} \right\} = \sin x$$

$$= \sin x$$

ملاحظة:

$$\begin{aligned} 2x^2 \sin x &= 2x^2 \sin x \\ \therefore 2x^2 \sin x - \frac{1}{4} &= \frac{1}{4} - 2x^2 \sin x \\ 2x^2 \sin x &= 1 - 2x^2 \sin x \\ \therefore 2x^2 \sin x &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$3) \{ (2x^2 + 2x) \sin x \}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \sin x + 2x \sin x \right\} \\ &= \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin x + 2x \sin x \end{aligned}$$

$$4) \left\{ \left(2x^2 + 2x + \frac{\pi}{4} \right) \sin x \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 2x} \right) \right\}$$

$$\{ (2x^2 + 2x) \sin x \}$$

$$= 2x^2 \sin x + 2x \sin x$$

ملاحظة:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \\ 2 &= (2 \text{ مقدار ثابت}) \end{aligned}$$

مسائل المستوى الأول

اختر

① المشتقة العكسية للدالة (٣ - س) هي

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

② المشتقة العكسية للدالة (٣ - س - ٢ + س) هي

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

③ = $\frac{س}{٥}$

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

④ = $\frac{٣-س}{١}$

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

⑤ = $\left(\frac{١-س}{٥} + \frac{٥}{١٢}\right)$

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

⑥ = $\left(\frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٤} س\right)$

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

⑦ = $\left(\frac{\pi}{٤} - س\right)$

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

| س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث | س - ٣ - س + ث |

$$\textcircled{8} \quad (s + 5)^2 \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} (s + 5)^2 \text{ و } s + 5 \\ (s + 5)^2 \text{ و } s + 5 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{9} \quad (s^2 - 2s + 1) \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} (s^2 - 2s + 1) \text{ و } s + 1 \\ (s^2 - 2s + 1) \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{10} \quad (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s + 1 \\ (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{11} \quad \frac{s^2 + 2s + 1}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{s^2 + 2s + 1}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s + 1 \\ \frac{s^2 + 2s + 1}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{12} \quad (s^2 - 1) \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} (s^2 - 1) \text{ و } s + 1 \\ (s^2 - 1) \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{13} \quad (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s + 1 \\ (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{14} \quad \frac{(s^2 + 2s + 1)}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s = \dots\dots\dots$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{(s^2 + 2s + 1)}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s + 1 \\ \frac{(s^2 + 2s + 1)}{(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } s + 1 \end{array} \right]$$

$$\textcircled{15} \quad \left[\left(\text{معا س حثا} - \frac{\pi}{4} \right) \text{معا س حثا} \right] \text{وس} = \dots$$

$$\left[\text{معا} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right) + \text{ث} \right] - \left[\text{معا} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right) + \text{ث} \right]$$

$$- \left[\text{معا} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right) + \text{ث} \right] \text{معا} \left(\frac{\pi}{4} + \text{س} \right) + \text{ث}$$

$$\textcircled{16} \quad \left[\left(\text{قا}^2 \text{س} - \text{طا}^2 \text{س} \right) \text{وس} = \dots \right]$$

$$\left[\text{س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{17} \quad \left[\frac{\text{معا}^2 \text{س}}{\text{س} + 1} \text{وس} = \dots \right] \left[\text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\left[\text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{18} \quad \left[\left(\text{معا}^2 \text{س} \text{وس} = \dots \right) \text{حيث س} \in [0, \pi] \right]$$

$$\left[- \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{معا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{19} \quad \left[\left(\text{طا}^2 \text{س} \text{وس} = \dots \right) \right]$$

$$\left[\text{قا}^2 \text{س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{قا}^2 \text{س} \right] \text{و} \left[\text{طا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{20} \quad \left[\left(\text{معا س} \text{وس} = \dots \right) \right]$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right] - \left[\frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} \right] \text{و} \left[\frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{21} \quad \left[\left(\text{س}^2 + \text{س} \right) \text{وس} = \dots \right]$$

$$\left[\text{س}^2 + \text{س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س}^2 + \text{س} \right] \text{و} \left[\text{س}^2 + \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{22} \quad \left[\left(\text{س}^2 \right) \text{وس} = \dots \right]$$

$$\left[\text{س}^2 \right] \text{و} \left[\text{س}^2 + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{س}^2 + \text{ث} \right]$$

٢) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

$$\textcircled{1} \quad \left[\text{إذا كانت د (س) = } \left(\text{معا س} \text{وس} \right) \text{ فإن د (0) - د (}\pi \text{)} = \dots \right]$$

$$\left[0 \text{ و } 1 \text{ و } -1 \text{ و } -2 \right]$$

$$\textcircled{2} \quad \left[\text{معا}^2 \text{س} \text{وس} = \dots \right]$$

$$\left[\text{معا س} \right] \text{و} \left[\text{طا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{معا س} + \text{ث} \right] \text{و} \left[\text{معا}^2 \text{س} \text{وس} + \text{ث} \right]$$

مسائل المستوى الثاني

١٠٠٠ وحدة

١. $\{ 9x^2 + 6x + 1 \}$ من x^2 و x و 1
٢. $\{ 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٣. $\{ \frac{8}{9}x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٤. $\{ 2x^2(5 - x^2) + 3x(2 - x) \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
٥. $\{ 3x^2(2 - x) + 4x(1 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٦. $\{ 2x^2(3 - x) + 3x(2 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٧. $\{ 2x^2(3 - x) + 3x(2 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٨. $\{ 2x^2(3 - x) + 3x(2 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٩. $\{ 2x^2(3 - x) + 3x(2 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
١٠. $\{ 2x^2(3 - x) + 3x(2 - x) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1

أوجد من غير باقي

١. $\{ (5 - x)(1 + x) \}$ من x^2 و x و 1
٢. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٣. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٤. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٥. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٦. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٧. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٨. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
٩. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
١٠. $\{ (1 - x)(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \}$ من x^3 و x^2 و x و 1
١١. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٢. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٣. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٤. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٥. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٦. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٧. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٨. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
١٩. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1
٢٠. $\{ 4(2 + x)^2 - 3x^2 \}$ من x^4 و x^3 و x^2 و x و 1

$$\textcircled{1} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{2}$$

$$\textcircled{3} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{4}$$

$$\textcircled{5} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{6}$$

$$\textcircled{7} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{8}$$

$$\textcircled{9} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{10}$$

$$\textcircled{11} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{12}$$

أوجد كذا من باقي:

$$\textcircled{13} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{14}$$

$$\textcircled{15} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{16}$$

$$\textcircled{17} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{18}$$

$$\textcircled{19} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{20}$$

$$\textcircled{21} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{22}$$

$$\textcircled{23} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{24}$$

$$\textcircled{25} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{26}$$

$$\textcircled{27} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{28}$$

$$\textcircled{29} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{30}$$

$$\textcircled{31} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{32}$$

$$\textcircled{33} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{34}$$

$$\textcircled{35} \quad \left[\frac{(1-s)(1-s^2-2s+1)}{(1-s)^2} \right] \textcircled{36}$$

مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢. أوجد كلاً مما يأتي

١. $\left| \frac{15}{8} \right|$ من $(3 - 3)$ من 2 من 3

٢. $\left| \frac{1+2}{3(3+3)} \right|$ من 3

٣. $\left| \frac{1+3}{3(1+3)} \right|$ من 3

٤. $\left| \frac{3}{3} \right|$ من $(\frac{3}{3} + \frac{3}{3})$ من 3

٥. $\left| \frac{3}{3} \right|$ من $3 + 2$ من 3

٦. $\left| \frac{1-3}{3(3-3)} \right|$ من 3

٧. $\left| \frac{3-3}{3-3} \right|$ من $3-3$ من $3+3$ من $3+3$

٨. $\left| \frac{3}{3} \right|$ من $(3+3)$ من 3

٣. أوجد كلاً مما يأتي

١. $\left| \frac{3}{3} \right|$ من 3 من 3

٢. $\left| \frac{3}{3} \right|$ من 3 من 3

٣. $\left| \frac{3+3}{3+3} \right|$ من $3+3$ من $3+3$

٤. $\left| \frac{3+3}{3+3} \right|$ من $3+3$ من $3+3$

2023

ثالثًا: حساب المثلثات

الوحدة الرابعة:

- الدرس ① : إيجاد الزوايا والارتفاع
- الدرس ② : إيجاد الارتفاع والمساحة
- الدرس ③ : إيجاد المساحة والمساحة
- الدرس ④ : مساحة المساحة



مراجعة الوحدة

زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

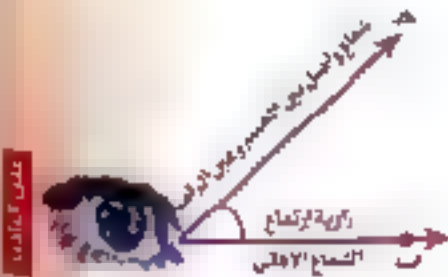
المحلول

١

درسنا في العام السابق زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية وأمكن إيجاد ارتفاع المبنى عن سطح الأرض دون أن نقوم بقياس الارتفاع لهذه المبنى وبعد دراستنا لقانوني الجيب وجيب التمام فإنه يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقاً على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض بوجه عام وسوف نتذكر فيما يلي مفهوم زاويتي الارتفاع والانخفاض.

زاوية الارتفاع

إذا رصد شخص A نقطة B أعلى من مستوى نظره الأفقي AB فإن الزاوية بين AB و AC تسمى زاوية ارتفاع B عن المستوى الأفقي لنظر الشخص A



على المثلث

زاوية الانخفاض

إذا رصد شخص A نقطة B أسفل من مستوى نظره الأفقي AB فإن الزاوية بين AB و AC تسمى زاوية انخفاض B عن المستوى الأفقي لنظر الشخص A



على المثلث

لاحظ أن

إذا كان من هو قياس زاوية ارتفاع B بالنسبة إلى
 ويمكن من هو قياس زاوية انخفاض A بالنسبة
 إلى B فإن $B = A$ من وذلك لأنهما متبادلتان



مثال

من نقطة على سطح الأرض رصت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها 36° ثم
 حل الرصد مسافة 65 متراً في خط مستقيم أفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس
 زاوية ارتفاع قمة البرج 53° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

الحل

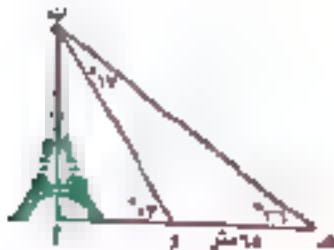
بفرض أن B هو ارتفاع البرج ، و (D, B, A) $53^\circ = 36^\circ - 17^\circ$

$$\text{في } \triangle DAB : \frac{DB}{\sin 36^\circ} = \frac{65}{\sin 17^\circ}$$

$$\therefore DB = \frac{65 \sin 36^\circ}{\sin 17^\circ} = 131.68 \text{ متر}$$

$$\text{في } \triangle DAB : \frac{AB}{\sin 53^\circ} = \frac{DB}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore AB = 131.68 \sin 53^\circ \approx 104 \text{ متر}$$



ملاحظة

عند حل المسألة إذا كان الشكل يحتوي على مثلثين فإننا نبدأ الحل من المثلث المعنوم
 طول أحد أضلاعه.

مثال

من طائرة هليكوبتر ثابتة على ارتفاع ١٠٠ متر من سطح الأرض في مستوا رأسي
إنخفاض سيارتين A و B على سطح الأرض فكانا 30° و 45° أوجد لأقرب متر المسافة
بين مقدمتي السيارتين. علماً بأن الطائرة والسيارتين A و B في مستوى رأسي واحد
وأن مسقط الطائرة في مستوى سطح الأرض C \overline{AC}

الحل

بفرض أن ارتفاع الطائرة هو h

$$\text{في } \triangle ACH: \frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{100}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore h = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 141.42 \text{ متر}$$

$$\therefore \angle C = (90^\circ + 30^\circ) - 90^\circ = 60^\circ = (\angle C \text{ في } \triangle BCH)$$

$$\text{في } \triangle BCH: \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{141.42}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore BC = \frac{141.42 \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = 161.42 \text{ متر}$$



مثال

برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة من نقطة على سطح الأرض من المستوى الأفقي المار بقاعدة الصخرة قياست زاوية ارتفاع قمة ولادة البرج فوجدت 46° على الترتيب أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.

الحل



$$\text{في } \triangle ABC : \angle C = 46^\circ - 40^\circ = 6^\circ$$

$$\text{في } \triangle ABC : \angle C = 46^\circ - 40^\circ = 6^\circ$$

$$\text{في المثلث } ABC : \frac{100}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\sin 6^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \sin 30^\circ}{\sin 6^\circ}$$

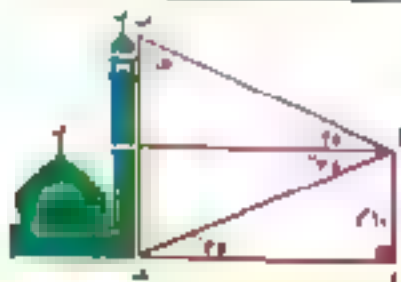
$$\text{في المثلث } ABC : \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 40^\circ}$$

$$BC = AB \sin 40^\circ$$

$$\text{بالتعويض من ١ في ٢ ينتج أن : } BC = \frac{100 \sin 30^\circ \sin 40^\circ}{\sin 6^\circ} = 35 \text{ متر}$$

مثال

من سطح مبنى يرتفع ٩٠ متر عن سطح الأرض قياست زاوية ارتفاع قمة مدينة فكانت 25° وقيست زاوية انخفاض قاعدة المدينة فكانت 35° أوجد ارتفاع المبنى عن مستوى أفقي واحد.



الحل

$$\text{في } \triangle ABC : \angle C = 25^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 25^\circ} = \frac{BC}{\sin 35^\circ}$$

$$\therefore \frac{10}{\text{ما } 35^\circ} = \frac{10}{\text{ما } 40^\circ}$$

$$\therefore 10 = \frac{10 \text{ ما } 40^\circ}{\text{ما } 35^\circ} = 17.13 \text{ متر}$$

$$\text{في } \triangle \text{ ب د هـ } : \angle \text{ د هـ ب } = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$$

$$\text{في } \triangle \text{ ا ب د } : \frac{\text{ب د}}{\text{ما } 40^\circ} = \frac{10}{\text{ما } 55^\circ}$$

$$\therefore \text{ب د} = \frac{10 \text{ ما } 55^\circ}{\text{ما } 40^\circ} = 12.61 \text{ متر}$$

$$\therefore \frac{17.13}{\text{ما } 40^\circ} = \frac{\text{ب د}}{\text{ما } 55^\circ}$$

مثال

من نقطة على سطح الأرض وجد أن زاوية ارتفاع قمة برج هي 40° ومن نقطة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار 3 متر وتعلوا الأولى مباشرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج 30° أوجد ارتفاع البرج إلى أقرب متر.

الحل

بفرض أن ا ب ارتفاع البرج

$$\text{في } \triangle \text{ ب د هـ } : \angle \text{ د هـ ب } = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$$

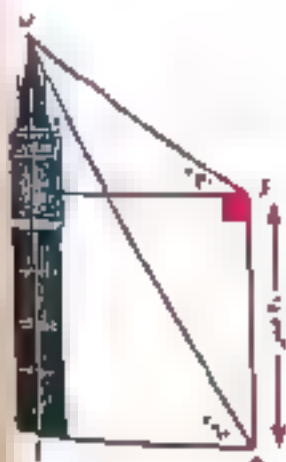
$$\therefore \angle \text{ د ب هـ} = 50^\circ, \angle \text{ د هـ ب} = 30^\circ$$

$$\therefore \frac{10}{\text{ما } 30^\circ} = \frac{\text{ب د}}{\text{ما } 50^\circ}$$

$$\therefore \text{ب د} = \frac{10 \text{ ما } 50^\circ}{\text{ما } 30^\circ} = 16.96 \text{ متر}$$

$$\text{في } \triangle \text{ ا ب د } : \frac{\text{ا ب}}{\text{ما } 40^\circ} = \frac{\text{ب د}}{\text{ما } 50^\circ}$$

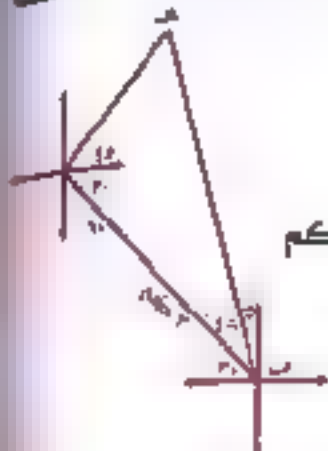
$$\therefore \text{ا ب} = \frac{16.96 \text{ ما } 40^\circ}{\text{ما } 50^\circ} = 13.3 \text{ متر}$$



مثال ٧

تسير سفينة بسرعة ١٥ كم/ساعة في اتجاه شرق الجنوب بزاوية قياسها ٩٠° رصد أحد رعاكها هدف ثابت في اتجاه الشمال الشرقي وبعد ساعتين وجد الراكب أن الهدف أصبح في اتجاه ٩٢° غرب الشمال أحسب بعد الهدف من السفينة في هذه اللحظة لأقرب حكم.

الحل



بفرض أن الوضع الأول للسفينة هو أ

والوضع الثاني للسفينة هو ب وموقع الهدف جـ

∴ المسافة التي قطعها السفينة في ساعتين $= 2 \times 15 = 30$ كم

$$\angle ٧٥ = ٩٠ + ٤٥ = (\text{جـ ب أ})$$

$$\angle ٤٨ = (٩٠ + ٩٢) - ٩٠ = (\text{ب ج أ})$$

$$\angle ٥٧ = (٤٨ + ٧٥) - ٩٠ = (\text{أ ج ب})$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\sin ٧٥} = \frac{٣٠}{\sin ٥٧}$$

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}}$$

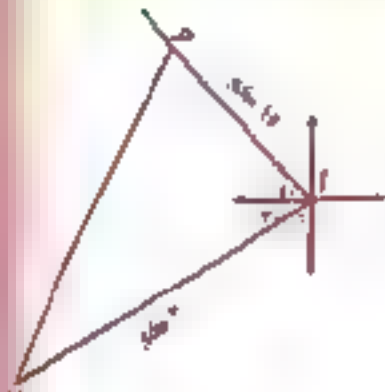
$$\therefore \text{ب ج} = \frac{٣٠ \sin ٧٥}{\sin ٥٧} = ٣٤,٥٥ \text{ كم}$$

∴ بعد السفينة عن الهدف لأقرب حكم $= ٣٥$ كم

مثال ٨

تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٩٠° غرب الجنوب بسرعة ١٠ كم/ساعة وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان في اتجاه ٤٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم/ساعة أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات

الحل



بفرض أن النقطة التي تحركت منها السفينة

هي أ وتحركت إلى ب والسفينة الأخرى تحركت إلى جـ

∴ المسافة التي قطعتها السفينة الأولى في

$$٣ \text{ ساعات} = 3 \times 10 = ٣٠ \text{ كم}$$

والمسافة التي قطعتها السفينة الثانية في

$$٢٨٠٠٠ = ٢ \times ٥ = ١٠ \text{ كم}$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (\angle \alpha + \angle \beta)$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (\angle \alpha + \angle \beta)$$

$$٨١٧٠٠٠ = \angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (\angle \alpha + \angle \beta)$$

$$\angle \gamma = ٢٨٠٠٠ \text{ كم}$$

الارتفاع بين السفينتين = ٢٨٠٠٠ كم

مثال

رصد رجل من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة كل زاوية إرتفاع قمة التل فوجدتها ٢٨°
ثم تحركت الرصد جهة التل على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٨° مسافة ١٠٠ متر
رصد قمة التل مرة أخرى فوجد أن قياس زاوية إرتفاعها ٥٠° أكتب إرتفاع التل لأقرب متر

الحل

يفرض أن ب إرتفاع التل وأن ه و نقطتا الرصد

$$\angle \gamma = (\angle \alpha + \angle \beta) = (\angle \alpha + \angle \beta)$$

$$\angle \gamma = (\angle \alpha + \angle \beta) = (\angle \alpha + \angle \beta)$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha - \angle \beta =$$

$$\angle \gamma = (\angle \alpha + \angle \beta) =$$

$$\frac{\sin \angle \gamma}{\sin \angle \alpha} = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \gamma}$$

$$\sin \angle \gamma = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha} = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha}$$

$$\sin \angle \gamma = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha} = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha}$$

$$\sin \angle \gamma = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha} = \frac{\sin \angle \beta}{\sin \angle \alpha}$$



المستوى الثاني
على أن لا
تتم هذا إلى
الدرجة

راجع معنا وأخبر نفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أمثلة لمراجعة ما سبق في صورة إختيار تراكمي على ما سبق دراسة يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست بإستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست رأياً يعودك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

مسائل المستوى الأول

١ شاهد شخص قمة ملئنة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمته 40° أوجد ارتفاع الملئنة إذا كان البعد بين الشخص وقاعدة الملئنة ٥ متر (١٢ متر)

٢ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها 34° ثم سار الراصد مسافة ٩٢ مترًا في خط مستقيم أفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج 51° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر. (٩٢ متر)

٣ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها 25° ثم سار الراصد في خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا في المستوى الأفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج $52^\circ 40'$ أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر (١١ متر)

٤ من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها 12° ولما سار مبتعدًا عن قاعدة البرج في طريق أفقي مسافة ٥٠ متر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج $20^\circ 30'$ أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر. (١٧ متر)



مسائل المستوى الثاني

١٢ من قمة تل رصد رجل قياس زاويتي إنخفاض قمة برج وقاعدته فكانتا 30° ، 42° على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا فأوجد ارتفاع التل لأقرب متر علما بأن قاعدة التل والبرج في مستوى أفقي واحد. [١٢٧ متر]

١٣ من قمة تل وجد راصد أن قياس زاويتي إنخفاض قمة برج وقاعدته هما 29° ، 65° على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج ٢٠ متر فأحسب ارتفاع التل لأقرب متر علما بأن قاعدة التل والبرج في مستوى أفقي واحد. [١١٨ متر]

١٤ من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا ليست زاويتا إنخفاض النقطتين A ، B على الأرض فكانتا 33° ، 42° على الترتيب ، فإذا كانت A تمثل قاعدة البرج ، B و C فأحسب طول A-B لأقرب متر [٦٤ متر]

١٥ برج ارتفاعه ٧٠ متر مقام على صخرة ، من نقطة على سطح الأرض في المستوى الأفقي A-B بقاعدة الصخرة ليست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدنا 33° ، 65° على الترتيب فأوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر. [٣٠ متر]

١٦ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر ليست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدنا 40° ، 60° على الترتيب فأوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر. [٣٧ متر]

١٧ من قمة برج ارتفاعه ٨٥ متر وصدت زاوية ارتفاع قمة جبل وجئت 29° ، ثم وصدت قمة الجبل من قاعدة البرج فوجدت 24° ، أحسب ارتفاع الجبل لأقرب متر [٣٣ متر]

١٨ ليست زاوية ارتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدته فوجد أن قياسها 30° ، كم متر يجب أن ترتفع قمة البرج حتى يصبح قياس زاوية ارتفاعها من نفس النقطة يساوي 45° [٢٠,٣ متر]

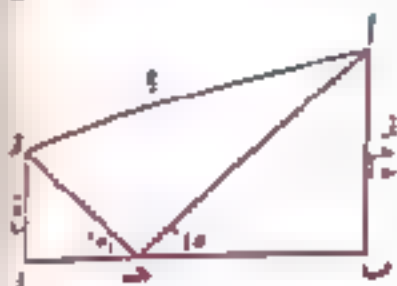
١٩ قارب بحاري يتحرك في الماء في خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠ متر/دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها 35° وبعد ثلثين ومن نفس القارب تم رصد زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها 90° ، أحسب ارتفاع الصخرة لأقرب متر. [٧,٥ متر]

١٧ من قمة منزل إرتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية إرتفاع قمة برج ٩٧° ، قياس زاوية إنخفاض قاعدة البرج ٣٥° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر علما بأن قاعدة البرج والمادة المنزل في مستوى أفقى واحد.

١٨ من قمة جبل إرتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة فوجد أن قياسها ٢٧° ٤٢' أوجد إرتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا علما بأنهما مقامين على أرض أفقية واحدة.

١٩ رصد قائد طائرة عمودية هدف على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه في لحظة ما ٣٠° ولما هبط قائد الطائرة رأسًا مسافة ٢ كيلو متر وجد أن قياس زاوية إنخفاض الهدف أصبحت ٢٠° أوجد إرتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف.

٢٠ في الشكل المقابل ،



(١٠٠ متر)

بالتوازي $AB \parallel CD$ و إرتفاعهما ١٠٠ م ، ٣٠ مترًا
رصد جسم على الأرض (حـ) يقع في المستوى
الرأسى المار بالثلاثين فإذا كان قياس زاويتي
إنخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب
أوجد البعد بين الباثوين مقربًا لأقرب متر.

٢١ المسافة الأفقية بين برجين ٥٠ متر وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما تشاهد من قمة الثاني ٢٠° فإذا كان إرتفاع البرج الثاني ١٠٠ متر فأوجد إرتفاع البرج الأول (علما بأن البرجين يقعا في مستوى أفقى واحد)

٢٢ من قاعدة منار إرتفاعه ٣٠ متر قيست زاوية إرتفاع قمة مبنى فكانت ٣٨° ومن قمة المنار قيست زاوية إنخفاض قمة المبنى نفسه فكانت ٢٩° ٥٢' أوجد لأقرب متر إرتفاع المبنى (علما بأن القاعدتين المبنى والمنار في مستوى أفقى واحد)

٢٣ من نقطة ما على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة شجرة تساوى ٤٠° ومن نقطة أخرى على إرتفاع ٤٥ مترًا من النقطة السابقة وفوقها تماخا وجد أن قياس زاوية إنخفاض قمة الشجرة تساوى ٣٠° أوجد إرتفاع الشجرة لأقرب متر.

من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسياً بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ متر/ثانية فوجد أن قياسها يساوي ٣٥° وبعد ثلاث دقائق عيّد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبح ٦٥°
أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر
[١٣٩ متر]

من نقطة م على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها في اتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ في اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة هـ وجد أن نقطة ب في اتجاه ٤٦° شمال الشرق.
أوجد عرض النهر لأقرب متر علماً بأن ضفتي النهر متوازيتان وأن النقط م، ب، هـ في مستوى أفقي واحد.
[٢٦٨ متر]

سفينة تتحرك في اتجاه الشمال الشرقي شوهد منها هدف يقع في جهة الشرق وبعد أن قطعت السفينة ١٢ كم لوحظ أن الهدف أصبح في اتجاه ٣٠° شرق الجنوب
أوجد بُعد الهدف عن السفينة في تلك اللحظة.
[٩.٨ كم]

ثلاث مدن م، ب، هـ في مستوى أفقي واحد حيث البعد بين م، ب يساوي ٦٠ كيلومتر
ب تقع في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٢٥° شمال الشرق من م والبعد بين ب، هـ يساوي ٨٠ كم
هـ تقع في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٦٠° شمال الغرب من ب
أوجد البعد بين المدينتين م، هـ
[٩٥.٣٣ كم]

ثلاث قرى م، ب، هـ تقع القرية م غرب القرية ب حيث م، ب = ٢٠ كم وتقع القرية هـ في اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية م، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب
أوجد المسافة بين القريتين ب، هـ لأقرب كيلومتر
[٦٠ كم]

تحركت سفينة من نقطة في اتجاه ٥٠° شرق الجنوب بسرعة ٨ كم/ساعة في نفس اللحظة ومن نفس النقطة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٦٠° شمال الشرق بسرعة ٤ كم/ساعة
أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين.
[١٩.٨ كم]

تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٦٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلو متر/ساعة وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة في اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦.٥ كيلو متر/ساعة
أوجد المسافة بين السفينتين بعد مضي ساعتين من لحظة تحركهما معاً.
[٢٣.٥٣ كم]

٢٧ تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٢٥° غرب الجنوب بسرعة مقدارها ١٥ كم / س وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة في اتجاه $١٨^\circ ٥٣'$ شمال الغرب بسرعة ٨ كم / س أوجد المسافة بين السفينتين بعد ٣ ساعات مقرباً لأقرب والمئين عشريين.

٢٨ تسير شخصان من نفس النقطة وفي نفس الوقت الأول في اتجاه ٤٠° غرب الشمال بسرعة ٣٢ مترًا / دقيقة والثاني في اتجاه ٧١° جنوب الغرب بسرعة ٣٨ متر / دقيقة أوجد لأقرب متر المسافة بينهما بعد ٥ دقائق.

٢٩ تسير سفينة بسرعة ٢٤ كم / ساعة في اتجاه الجنوب وبعد ١٥ ساعة في اتجاه ٩٥° شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة في اتجاه ٧٩° جنوب غرب نفس الهدف أوجد بعد الهدف من السفينة عندئذ.

٣٠ رصدت طائرة ص من محطتين A و B عند لحظة مرورها بمستوى الرأس A في المستقيم AB حيث $AB = ٣٠٠٠$ متر فوجد أن قياس زاوية الارتفاعها من A هو $٦٩^\circ ٥٣'$ وقياس زاوية ارتفاعها من B هو $٢٩^\circ ٣٤'$ والمسطح الرأس للطائرة AB أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر.

٣١ رصدت سفينة في عرض البحر مارة فوجد أنها تقع على بعد ٥٠ كم نحو الشرق ثم تحركت السفينة في اتجاه شمال الشرق وبعد ساعتين وجدت أن المارة أصبحت تقع في اتجاه ٥٠° جنوب الشرق لها أوجد سرعة السفينة.

٣٢ تسير سفينة نحو الشمال الشرقي بسرعة منتظمة مقدارها ٢٨ كم / س شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين في اتجاه ٣٧° غرب الشمال وبعد ٣ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت في اتجاه ٢١° جنوب الغرب بالنسبة له والآخرى في اتجاه ١٩° شمال الغرب بالنسبة له أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر عندما كان النقطتين والراكب في مستوى أفقي واحد.

٣٣ رصد رجل من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة كل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢١° ولا بعد نحو التل مسافة ٤٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ١٥° وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٦° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة قل رصد رجل زاوية ارتفاع قمة لتل فوجد أن قياسها 27° ولما صعد نحو لتل مسافة ٢٠٠ متر على طريق يميل على الأفقي بزاوية قياسها 14° وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل 38° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر [١٩١ متر]

مسائل تقبس مسنويات عليا من التفكير

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ مترًا قاس شخص زاوية انخماض هدف ما هو جدها 75° ثم قاس زاوية انخماض نفس الهدف من قمة منزل ارتفاعه ١٢ متر فكانت 25° فإذا كان الهدف يقع على الخط الأفقي المار بين قاصتي البرج والمنزل فأوجد المسافة بين قمتي البرج والمنزل وأيضا المسافة بين قاعدتيهما.

سفينة تسير بسرعة منتظمة ١٢ كم / ساعة في اتجاه 30° شرق الشمال شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين في اتجاه الشمال الغربي وبعد ٢ ساعات وجد الراكب أن إحدى النقطتين أصبحت في اتجاه 35° جنوب الغرب والآخرى أصبحت في اتجاه 15° شمال الغرب أوجد البعد بين النقطتين علما بأن النقطتين والراكب في مستوى أفقي واحد [١٠٠٠ متر]

شاهد طيار هدفاً وهو على ارتفاع ١٠٠٠ متر عن سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخماضه 69° وبعد ثلاث دقائق من الطيران على نفس الارتفاع متجهاً نحو الهدف وجد أن قياس زاوية انخماض الهدف أصبحت $36^\circ 42'$ فما سرعة الطيار بالمترو دقيقة

سفينة تسير بسرعة منتظمة قدرها ٢٥ كم / ساعة في اتجاه 27° شمال الغرب شوهد فيها عند الساعة العاشرة صباحاً قنار في اتجاه 20° شرق الشمال وعند الساعة الواحدة ظهراً من نفس اليوم وجد أن القنار أصبح في اتجاه الشمال الشرقي أوجد بُعد القنار عن السفينة في تلك اللحظة.

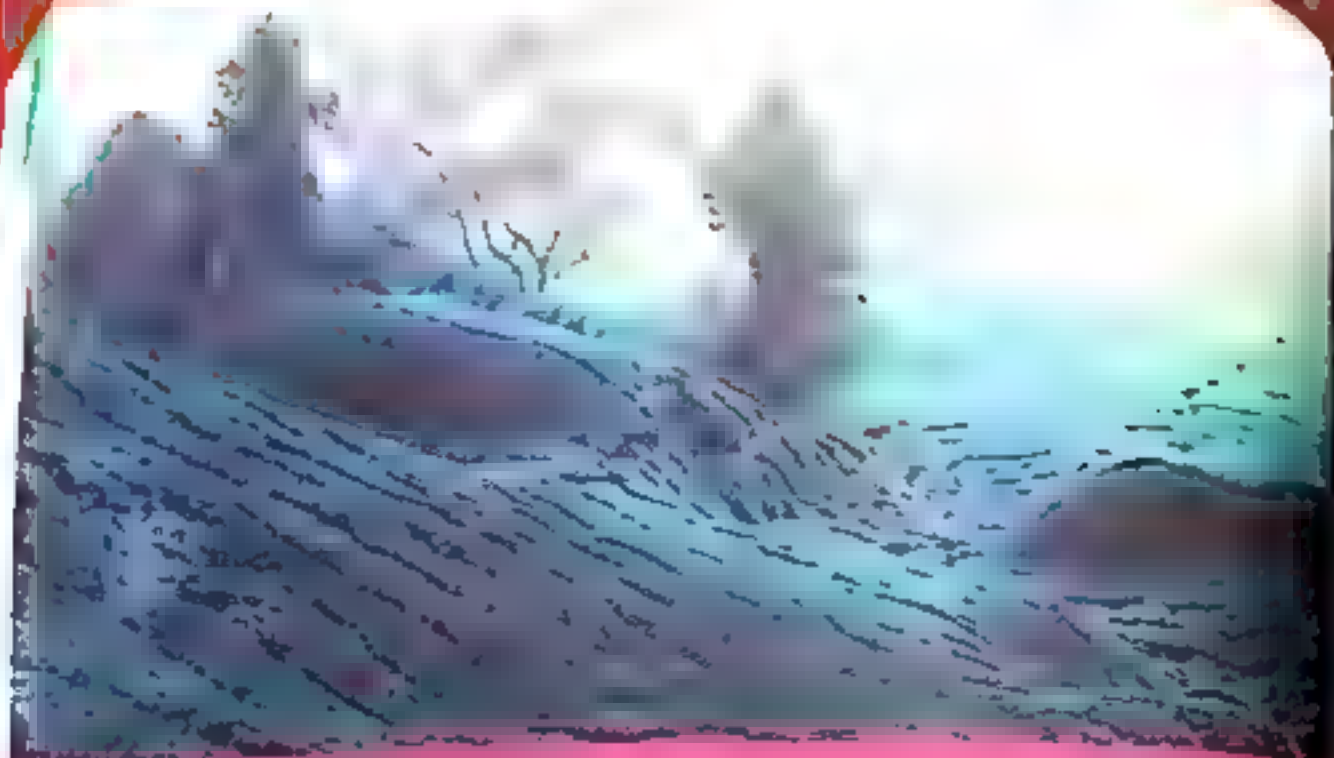
يرتكز سلم AB بطرفه A على حائط رأسي وبطرفه B على أرض أفقية بحيث كان السلم يميل على الأفقي بزاوية قياسها 60° فإذا تحرك الطرف B للسلم مسافة ١٫٥ متر بعيداً عن الحائط حتى أصبح السلم يميل على الأفقي بزاوية 45° أوجد طول السلم [١٫٧ متر]

من محطة للرصد رصدت طائرتين (أ ، ب) تقعان في مستوى رأس واحد مع محطة الرصد وهي جهة واحدة منها ولهما نفس الارتفاع من محطة الرصد فإذا كان قياس زاويتي الارتفاع الطائرتين هما h° ، y° على الترتيب

فأثبت أن ارتفاع الطائرتين = $\frac{h}{\tan h - \tan y}$ حيث h المسافة بين (أ ، ب) إذا كانت

$h = 100$ متر ، $h = 35^\circ$ ، $y = 17^\circ$ فأوجد ارتفاع الطائرتين لأقرب متر

100 متر

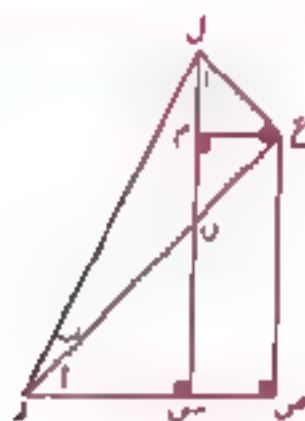


الدوال المثلثية لمجموع ومفرق قياسي زاويتين

التمرين

٢

قريباً نلاحظ أن



(لاحظ أن، $ES = MS$)

$$\text{ن (١٥)} = \text{و (د ع ل م)}$$

$$\text{ها (١ + ب)} = \frac{\text{ل س}}{\text{ل و}} = \frac{\text{م س}}{\text{ل و}} + \frac{\text{م ل}}{\text{ل و}}$$

$$= \frac{\text{م س}}{\text{ل و}} + \frac{\text{م ل}}{\text{ل و}}$$

$$= \frac{\text{م س}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل و}}{\text{ل و}} + \frac{\text{م ل}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل و}}{\text{ل و}}$$

$$= \frac{\text{م س}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل و}}{\text{ل و}} + \frac{\text{م ل}}{\text{ل و}} \times \frac{\text{ل و}}{\text{ل و}}$$

$$= \text{ها ١} \times \text{متا ب} + \text{متا ا} \times \text{ها ب}$$

فيكون: **ها (١ + ب) = ها ا متا ب + متا ا ها ب** (البرهان لا يمتحن فيه الطالب)

ويوضع (- ب) بدلاً من ب منتج أن،

$$\text{ها [(ب-) + ١] = ها ا متا (-ب) + متا ا ها (-ب)}$$



وحيث أن $\text{ها} = (-\text{ب}) = -\text{ها} \text{ ب}$ ، $\text{ها} = (-\text{ب}) = -\text{ها} \text{ ب}$

فيكون ، $\text{ها} = (-\text{ب}) = -\text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}$

وباستخدام نفس الشكل يمكن إثبات أن ، $\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}$

ونستنتج أيضاً أن ، $\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{ها} \text{ ب} + \text{ها} \text{ ب}$

$$\text{وحيث أن ، طا} = (\text{ب} + 1) = \frac{\text{ها} = (\text{ب} + 1)}{\text{ها} = (\text{ب} + 1)} = \frac{\text{ها} \text{ ب} + \text{ها} \text{ ب}}{\text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}}$$

ويقسمة كل من البسط والمقام على $\text{ها} \text{ ب} \neq 0$ ، يكون ،

$$\text{طا} = (\text{ب} + 1) = \frac{\text{طا} + 1}{\text{طا} - 1} \quad \text{وعند وضع } (-\text{ب}) \text{ بدلاً من ب فإذن ،}$$

$$\text{طا} = (\text{ب} - 1) = \frac{\text{طا} - 1}{\text{طا} + 1} \quad \text{حيث ، ب} \neq \frac{\pi}{4} (1 + \text{ب}^2) \neq 0 \quad \text{ب} \in \mathbb{R}$$

ملاحظة

في أي مثلث $\text{ب} \text{ هـ}$:

$$\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{هـ} \text{ ، طا} = (\text{ب} + 1) = -\text{هـ} \text{ ، طا} = (\text{ب} + 1) = -\text{هـ} \text{ ، طا} = (\text{ب} + 1) = -\text{هـ}$$

مثال

إذا كان ، ب فيساراويتين وكان $\frac{4}{9} = 1$ حيث ، $\frac{\pi}{4} > 1 > \frac{\pi}{4}$ ، $\text{ها} = \text{ب} = \frac{9}{13}$

حيث $\frac{\pi}{4} > \text{ب} > \frac{\pi}{4}$ فأوجد قيمة ، $\text{ها} = (\text{ب} + 1)$ ، $\text{ها} = (\text{ب} + 1)$

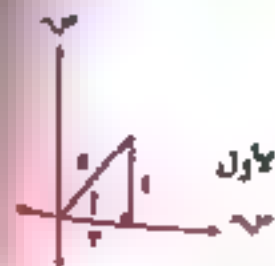
الحل

$$\frac{\pi}{4} > 1 > \frac{\pi}{4}$$

$$\text{ها} = 1 = \frac{4}{9}$$

.. قياس زاوية تقع في الربع الأول

$$\text{ها} = 1 = \frac{4}{9}$$



∴ ب تقع في زاوية تقع في الربع الرابع

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{12}{13} = \cos \theta$$

$$\frac{5}{13} = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} =$$

$$\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{16}{65}$$

$$\frac{12}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} =$$

$$\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$



مثال

إذا كان $\theta = \frac{\pi}{4}$ ما $\cos(\theta + \phi)$ حيث $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

وكان $\theta = \frac{\pi}{4}$ ما $\sin(\theta + \phi)$ حيث $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

فلوجد قيمة كل من $\cos(\theta + \phi)$ و $\sin(\theta + \phi)$

الحل

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

∴ تقع في الربع الثالث

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

∴ تقع في الربع الرابع



$$\frac{74-}{y} = \text{طا } ب ، \frac{74-}{y0} = \text{طا } ب$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \text{طا } ب + \text{طا } ب$$

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{120} = \frac{96}{120} + \frac{74-}{120} = \left(\frac{74-}{y0}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right) + \frac{y}{y0} \times \frac{7-}{8} = (ب + 1) \text{ طا } ب$$

$$\left(\frac{74-}{y0}\right) \times \left(\frac{7-}{8}\right) - \frac{y}{y0} \times \frac{7-}{8} = \text{طا } ب - \text{طا } ب = (ب + 1) \text{ طا } ب$$

$$\frac{4}{8} - = \frac{74-}{120} = \frac{72}{120} - \frac{74-}{120}$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \frac{72}{120}$$

$$\frac{117-}{44} = \frac{117}{78} = \frac{\left(\frac{74-}{y}\right) - \frac{7}{4}}{\left(\frac{74-}{y}\right) \times \frac{7}{4} + 1} = \frac{\text{طا } ب - 1}{\text{طا } ب + 1} \text{ طا } (ب - 1)$$

مثال

أوجد ، طا (ب + 1) ، طا ب
ب م مثلث فيه $\frac{4}{8} = 1$ ، $\frac{7}{8} = 1$ ، $\frac{74-}{y} = 1$

الحل

\therefore طا (ب + 1) ، طا ب موجبتان

\therefore ب تقعا في الربع الأول



$$\therefore \text{طا } 1 = \frac{7}{8} = 1 \text{ طا } ب ، \frac{10}{17} = 1 \text{ طا } ب ، \frac{A}{17} = 1 \text{ طا } ب$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \text{طا } ب + \text{طا } ب$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \frac{13-}{80} = \frac{40}{80} - \frac{27}{80} = \frac{10}{17} \times \frac{7}{8} - \frac{A}{17} \times \frac{7}{8} = (ب + 1) \text{ طا } ب$$

$$\text{طا } ب = [(ب + 1) - 1] \times 180$$

$$- = \frac{13-}{80} = \left(\frac{13-}{80}\right) - = (ب + 1) \text{ طا } ب$$

مثال ٤

يبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١ ما $^{\circ}20 + ^{\circ}40 + ^{\circ}60 + ^{\circ}80$ ما $^{\circ}90$

٢ ما $^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30 + ^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30$ ما $^{\circ}40$

٣ ما $\frac{\pi}{8}$ ما $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ ما $\frac{\pi}{8}$

٤ ما $^{\circ}35 - ^{\circ}10 - ^{\circ}55$ ما $^{\circ}80$

الحل

١ المقدار = ما $(^{\circ}20 + ^{\circ}40) = ^{\circ}60$ ما $^{\circ}30 - \frac{1}{4}$

٢ المقدار = ما $(^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30) = ^{\circ}30$ ما $\frac{\sqrt{3}}{2}$

٣ المقدار = ما $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{2}$ ما $\frac{\pi}{4}$

٤ المقدار = ما $^{\circ}35 - ^{\circ}10 - ^{\circ}55$ ما $^{\circ}20$

= ما $(^{\circ}10 + ^{\circ}35) = ^{\circ}45$ ما $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ملاحظة
 $^{\circ}90 = \frac{180}{1} = \frac{\pi}{2}$

مثال ٥

يبدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١ ما $^{\circ}15$

٢ ما $^{\circ}75$

٣ ما $^{\circ}105$

الحل

نحول للزاوية إلى طرح أو مجموعة زاويتين

١ ما $^{\circ}15 = (^{\circ}45 - ^{\circ}30)$ ما $^{\circ}90$ ما $^{\circ}45$ ما $^{\circ}15$

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

لاحظ أنه يمكن تحويل $^{\circ}15$ إلى $(^{\circ}30 - ^{\circ}45)$ ونحل بنفس الطريقة

• $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ •

$$\frac{\sqrt{y}-\sqrt{z}}{6} = \frac{\sqrt{y}}{6} \times \frac{1-\sqrt{z/y}}{1+\sqrt{z/y}} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\sqrt{y/z}} - \frac{\sqrt{y}}{6} \times \frac{1}{\sqrt{y/z}} =$$

$$({}^0 10 + {}^0 9_1) U = {}^0 9_{10} U \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-1} \times \frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} = \frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} = \frac{10\sqrt{6}+9\sqrt{6}}{10\sqrt{6}-9\sqrt{6}} =$$

$$\sqrt{y} - y = \frac{\sqrt{y} + y}{y} = \frac{1 + \sqrt{y}}{\sqrt{y} + y} =$$

أوجد قيمة $\sin \theta$ المحصورة بين 0° و 30° والتي تحقق المعادلة:

میں سے جتنا ^{238}Pu - ^{239}Pu میں سے ^{238}Pu کا $\frac{1}{4}$

∴ $\text{ہٹا} (\text{ہس} + \text{ہس}) = \text{ہٹا ہس ہٹا ہس} - \text{ہا ہس ہا ہس}$

∴ الطرف الأيمن = $(s + 25)^{\circ}$ $\frac{1}{4}$

∴ الزاوية تقف في الربع الأول أو الرابع (موجب)

∴ الراوية التي جيب تمامها $\frac{1}{3}$ قياسها 90° (الرابع الأول) أو 300° (الرابع الرابع)

$$\theta_{11} = \theta_{22} + \pi \quad \text{و} \quad \theta_{12} = \theta_{23} + \pi$$

س = ۲۵° او س = ۲۶۵°

مثال ٧

إذا كانت $\sin \theta = \frac{\pi}{4}$ فما θ ما $\sin \theta = \frac{\pi}{4}$
 فأوجد قيمة θ حيث $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$

الحل

$$\sin \theta = \left(\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$\therefore \frac{\pi}{4}$ (موجبة) \therefore الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني

\therefore الزاوية $\left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ التي جيبها $\frac{\pi}{4}$ يكون قياسها $\frac{\pi}{4}$ إذا كانت تقع في الربع

الأول أو $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ إذا كانت تقع في الربع الثاني

$$\frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{4} \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\theta$$

مثال ٨

برهن على أن قيمة المقدار:

$\sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta) + \sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta)$
 لا تتوقف على قيمة θ

الحل

$$\therefore \sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta) + \sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \text{بوضع } \theta = 90^\circ \Rightarrow \sin (90^\circ + 90^\circ) + \sin (90^\circ - 90^\circ) + \sin (90^\circ + 90^\circ) + \sin (90^\circ - 90^\circ)$$

$$\therefore \text{المقدار} = \sin (180^\circ) + \sin (0^\circ) + \sin (180^\circ) + \sin (0^\circ) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

\therefore المقدار لا يتوقف على قيمة θ

مثال ١

يسون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$\textcircled{1} \quad ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} = ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} + ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} = ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

الحل

$$\textcircled{1} \quad \text{الطرف الأيسر} = ٦٧^\circ \text{ متا} + (٦٠^\circ + ٣٠^\circ) \text{ متا}$$

$$= ٦٧^\circ \text{ متا} + ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} = ٦٧^\circ \text{ متا} + ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

$$= \frac{٦٧}{٩٠} \text{ متا} + \frac{٦٠}{٩٠} \text{ متا} + \frac{٣٠}{٩٠} \text{ متا} = \frac{٦٧+٦٠+٣٠}{٩٠} \text{ متا} = \frac{١٥٧}{٩٠} \text{ متا}$$

$$= \text{الطرف الأيسر} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

لاحظ أن

$$٩٠^\circ \text{ متا} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{الطرف الأيسر} = \frac{(٦٠^\circ + ٣٠^\circ) \text{ متا}}{(٩٠^\circ + ٣٠^\circ) \text{ متا}} = \frac{٩٠^\circ \text{ متا}}{١٢٠^\circ \text{ متا}} = \frac{٩٠}{١٢٠}$$

$$= \frac{٩٠}{١٢٠} = \frac{٣}{٤} = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال ٢

$$\text{أثبت أن: } ١^\circ \text{ متا} + (٣٠^\circ + ١^\circ) \text{ متا} = (٩٠^\circ - ١^\circ) \text{ متا}$$

الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = ١^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ١^\circ \text{ متا} = ٣٢^\circ \text{ متا}$$

$$= \frac{٣٢}{٩٠} \text{ متا} = \frac{٣٢}{٩٠} \text{ متا} = \frac{٣٢}{٩٠} \text{ متا} = \frac{٣٢}{٩٠} \text{ متا}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = (٩٠^\circ - ١^\circ) \text{ متا} = ٨٩^\circ \text{ متا}$$

الطرفان متساويان.

مثال ١٠

أثبت أن: $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$

الحل

$$\begin{aligned} \text{الطرف الأيمن} &= \frac{\sin A \sin B + \sin A \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin A \sin B}{\sin A \sin B} \\ &= \frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = \text{الطرف الأيسر} \end{aligned}$$

مثال ١١

إذا كان $\angle A = 2^\circ$ ، $\angle B = 1^\circ$ حيث $\angle C = 179^\circ$ فما قياسا زاويتان حادتان
فأثبت أن: $\angle C = 179^\circ$

الحل

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1^\circ}{1^\circ} = \frac{1^\circ - 2^\circ}{1^\circ \times 2 + 1} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A \sin B + 1} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A \sin B + 1} \\ &\therefore \angle C = 179^\circ \end{aligned}$$

مثال ١٢

يكون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن: $\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ = 1$

الحل

$$\begin{aligned} 1 &= \sin 40^\circ \quad \therefore \sin 10^\circ + \sin 30^\circ = 1 \\ &\therefore \sin 10^\circ + \sin 30^\circ - 1 = 0 \\ &\therefore \sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ = 1 \end{aligned}$$

الحل

١) أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياس زاويتين.
٢) أوجد شدة التيار الكهربى بعد ثلثية واحدة (دون استخدام الجاسية)

$$\frac{1}{2} \pi$$

ن: $\frac{3}{4}\pi$ هنا 2π العلاقة المعطاة $\therefore \frac{3}{4} = \omega$ هنا $(175 - 140)$

$${}^0T_1 + {}^0Z_0 = {}^0Y_0; \quad {}^0V_0 \text{ 在 } \frac{Y}{Y} = 0$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ جیسا } (u^0 \pi_0 + u^0 \pi_0) \quad \text{بالتعویض میں } u = 1$$

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \times \text{بالضرب} \left[\frac{1-3}{2} \right] \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \right] \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)^2}{n} = \left[\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{k} \right] \frac{r}{q} = \omega$$

مطلوب

السؤال الأول: (الدرجة الأولى لعلوم الأرض)

السؤال الثاني: (الدرجة الأولى لعلوم الأرض)

راجع معناه وأذكر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة الثانية



١ (أ) من قمة منزل يرتفع ٦٠ متراً من سطح الأرض قياست زاويتي إنخفاض نقطتين س، ص على سطح الأرض وهي جهة واحدة من المنزل فكانتا 46° ، 38° على لترتيب فإذا كانت قاعدة المنزل على نفس الخط الأفقي المار بالنقطتين س، ص فأوجد البعد بين النقطتين.

(ب) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها 25° ثم سار الراصد في خط مستقيم مسافة ٥٧ متراً في المستوى الأفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج 54° ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

(ج) من قمة منزل ارتفاعه ٨ أمتار عن سطح الأرض مكان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة 18° وقياس زاوية انخفاض قاعدتها 29° أوجد ارتفاع الشجرة وبعداها عن المبنى.

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

$$\textcircled{1} \text{ ما } \frac{\pi}{4} \text{ متا } \frac{\pi}{18} + \text{متا } \frac{\pi}{9} \text{ ما } \frac{\pi}{18} = \dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{ د } 2 \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \right]$$

$$\textcircled{2} \text{ ما } 75^\circ \text{ متا } 90^\circ + \text{متا } 75^\circ \text{ ما } 90^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{3}{4} \text{ د } 1 \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{3}{4} \right]$$

$$\textcircled{3} \text{ ما } 5 \text{ س } 3 \text{ ما } 3 \text{ س } + \text{متا } 5 \text{ س } 3 \text{ ما } 3 \text{ س } = \dots\dots\dots$$

$$\left[\text{متا } 2 \text{ س } 8 \text{ د } \text{متا } 8 \text{ س } 2 \text{ د } \text{متا } 8 \text{ س } 2 \text{ د } \text{متا } 2 \text{ س } 8 \right]$$

$$\textcircled{4} \text{ إذا كان ما } 2 \text{ س } 2 \text{ متا } 90^\circ - \text{متا } 2 \text{ س } 2 \text{ ما } 90^\circ = \frac{1}{4} \text{ فإن } (2 \text{ س}) = \dots\dots\dots$$

$$\left[80^\circ \text{ د } 90^\circ \text{ د } 30^\circ \text{ د } 80^\circ \right]$$

$$\textcircled{5} \text{ متا } \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \dots\dots\dots$$

$$\left[\theta \text{ ما } - \theta \text{ د } \theta \text{ ما } - \theta \text{ د } \theta \text{ ما } - \theta \right]$$

$$\textcircled{6} \text{ ما } \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{ (متا } 3 \text{ ما } \theta) \text{ د } \frac{1}{4} \text{ (متا } \theta \text{ ما } \theta) \text{ د } \frac{1}{4} \text{ (متا } \theta \text{ ما } \theta) \right]$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{ (متا } 3 \text{ ما } \theta + \theta \text{ ما } 3) \text{ د } \frac{1}{4} \text{ (متا } 3 \text{ ما } \theta + \theta \text{ ما } 3) \right]$$

$$\textcircled{7} \text{ ما } (b+1) + \text{ما } (b-1) = \dots\dots\dots$$

$$\left[\text{ما } 1 \text{ متا } 1 \text{ د } \text{متا } 1 \text{ ما } 1 \text{ د } 2 \text{ ما } 1 \text{ ما } 1 \text{ د } 2 \text{ ما } 1 \text{ ما } 1 \right]$$

$$\textcircled{8} \text{ متا } (س - \text{متا } س - \text{طا } س \text{ ما } س) = \dots\dots\dots$$

$$\left[4 \text{ ما } \frac{س}{4} \text{ د } \text{متا } 2 \text{ س } 1 - \text{متا } س \text{ د } \text{ما } 2 \text{ س } 1 \right]$$

$$\textcircled{9} \text{ قبة } \frac{1 + \text{طا } س}{\text{طا } س - 1} = \dots\dots\dots$$

$$\left[1 - \text{طا } (س + 45^\circ) \text{ د } \text{طا } (س - 45^\circ) \text{ د } \text{طا } (2 \text{ س } - 1) \right]$$

$$\textcircled{10} \text{ متا } 70^\circ \text{ متا } 40^\circ + \text{متا } 70^\circ \text{ متا } 50^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\left[\frac{1}{4} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{4} - \text{د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \right]$$

$$\textcircled{11} \text{ ما } 55^\circ \text{ متا } 35^\circ + \text{ما } 35^\circ 55^\circ = \dots\dots\dots \left[1 \text{ د } 1 - \text{د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{3}{4} \right]$$

14) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة
 $\left[\frac{17}{18} - \frac{17}{18} \right]$
 1) ما (ب + 1) هنا ؟
 2) هنا ؟

15) إذا كانت $1^2 = \frac{16}{18}$ حيث $1^2 = 1$ ، $2^2 = 4$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، $5^2 = 25$ ، $6^2 = 36$ ، $7^2 = 49$ ، $8^2 = 64$ ، $9^2 = 81$ ، $10^2 = 100$ ، $11^2 = 121$ ، $12^2 = 144$ ، $13^2 = 169$ ، $14^2 = 196$ ، $15^2 = 225$ ، $16^2 = 256$ ، $17^2 = 289$ ، $18^2 = 324$ ، $19^2 = 361$ ، $20^2 = 400$ ، $21^2 = 441$ ، $22^2 = 484$ ، $23^2 = 529$ ، $24^2 = 576$ ، $25^2 = 625$ ، $26^2 = 676$ ، $27^2 = 729$ ، $28^2 = 784$ ، $29^2 = 841$ ، $30^2 = 900$ ، $31^2 = 961$ ، $32^2 = 1024$ ، $33^2 = 1089$ ، $34^2 = 1156$ ، $35^2 = 1225$ ، $36^2 = 1296$ ، $37^2 = 1369$ ، $38^2 = 1444$ ، $39^2 = 1521$ ، $40^2 = 1600$ ، $41^2 = 1681$ ، $42^2 = 1764$ ، $43^2 = 1849$ ، $44^2 = 1936$ ، $45^2 = 2025$ ، $46^2 = 2116$ ، $47^2 = 2209$ ، $48^2 = 2304$ ، $49^2 = 2401$ ، $50^2 = 2500$ ، $51^2 = 2601$ ، $52^2 = 2704$ ، $53^2 = 2809$ ، $54^2 = 2916$ ، $55^2 = 3025$ ، $56^2 = 3136$ ، $57^2 = 3249$ ، $58^2 = 3364$ ، $59^2 = 3481$ ، $60^2 = 3600$ ، $61^2 = 3721$ ، $62^2 = 3844$ ، $63^2 = 3969$ ، $64^2 = 4096$ ، $65^2 = 4225$ ، $66^2 = 4356$ ، $67^2 = 4489$ ، $68^2 = 4624$ ، $69^2 = 4761$ ، $70^2 = 4900$ ، $71^2 = 5041$ ، $72^2 = 5184$ ، $73^2 = 5329$ ، $74^2 = 5476$ ، $75^2 = 5625$ ، $76^2 = 5776$ ، $77^2 = 5929$ ، $78^2 = 6084$ ، $79^2 = 6241$ ، $80^2 = 6400$ ، $81^2 = 6561$ ، $82^2 = 6724$ ، $83^2 = 6889$ ، $84^2 = 7056$ ، $85^2 = 7225$ ، $86^2 = 7396$ ، $87^2 = 7569$ ، $88^2 = 7744$ ، $89^2 = 7921$ ، $90^2 = 8100$ ، $91^2 = 8281$ ، $92^2 = 8464$ ، $93^2 = 8649$ ، $94^2 = 8836$ ، $95^2 = 9025$ ، $96^2 = 9216$ ، $97^2 = 9409$ ، $98^2 = 9604$ ، $99^2 = 9801$ ، $100^2 = 10000$ ، $101^2 = 10201$ ، $102^2 = 10404$ ، $103^2 = 10609$ ، $104^2 = 10816$ ، $105^2 = 11025$ ، $106^2 = 11236$ ، $107^2 = 11449$ ، $108^2 = 11664$ ، $109^2 = 11881$ ، $110^2 = 12100$ ، $111^2 = 12321$ ، $112^2 = 12544$ ، $113^2 = 12769$ ، $114^2 = 12996$ ، $115^2 = 13225$ ، $116^2 = 13456$ ، $117^2 = 13689$ ، $118^2 = 13924$ ، $119^2 = 14161$ ، $120^2 = 14400$ ، $121^2 = 14641$ ، $122^2 = 14884$ ، $123^2 = 15129$ ، $124^2 = 15376$ ، $125^2 = 15625$ ، $126^2 = 15876$ ، $127^2 = 16129$ ، $128^2 = 16384$ ، $129^2 = 16641$ ، $130^2 = 16900$ ، $131^2 = 17161$ ، $132^2 = 17424$ ، $133^2 = 17689$ ، $134^2 = 17956$ ، $135^2 = 18225$ ، $136^2 = 18496$ ، $137^2 = 18769$ ، $138^2 = 19044$ ، $139^2 = 19321$ ، $140^2 = 19600$ ، $141^2 = 19881$ ، $142^2 = 20164$ ، $143^2 = 20449$ ، $144^2 = 20736$ ، $145^2 = 21025$ ، $146^2 = 21316$ ، $147^2 = 21609$ ، $148^2 = 21904$ ، $149^2 = 22201$ ، $150^2 = 22500$ ، $151^2 = 22801$ ، $152^2 = 23104$ ، $153^2 = 23409$ ، $154^2 = 23716$ ، $155^2 = 24025$ ، $156^2 = 24336$ ، $157^2 = 24649$ ، $158^2 = 24964$ ، $159^2 = 25281$ ، $160^2 = 25600$ ، $161^2 = 25921$ ، $162^2 = 26244$ ، $163^2 = 26569$ ، $164^2 = 26896$ ، $165^2 = 27225$ ، $166^2 = 27556$ ، $167^2 = 27889$ ، $168^2 = 28224$ ، $169^2 = 28561$ ، $170^2 = 28900$ ، $171^2 = 29241$ ، $172^2 = 29584$ ، $173^2 = 29929$ ، $174^2 = 30276$ ، $175^2 = 30625$ ، $176^2 = 30976$ ، $177^2 = 31329$ ، $178^2 = 31684$ ، $179^2 = 32041$ ، $180^2 = 32400$ ، $181^2 = 32761$ ، $182^2 = 33124$ ، $183^2 = 33489$ ، $184^2 = 33856$ ، $185^2 = 34225$ ، $186^2 = 34596$ ، $187^2 = 34969$ ، $188^2 = 35344$ ، $189^2 = 35721$ ، $190^2 = 36100$ ، $191^2 = 36481$ ، $192^2 = 36864$ ، $193^2 = 37249$ ، $194^2 = 37636$ ، $195^2 = 38025$ ، $196^2 = 38416$ ، $197^2 = 38809$ ، $198^2 = 39204$ ، $199^2 = 39601$ ، $200^2 = 40000$ ، $201^2 = 40401$ ، $202^2 = 40804$ ، $203^2 = 41209$ ، $204^2 = 41616$ ، $205^2 = 42025$ ، $206^2 = 42436$ ، $207^2 = 42849$ ، $208^2 = 43264$ ، $209^2 = 43681$ ، $210^2 = 44100$ ، $211^2 = 44521$ ، $212^2 = 44944$ ، $213^2 = 45369$ ، $214^2 = 45796$ ، $215^2 = 46225$ ، $216^2 = 46656$ ، $217^2 = 47089$ ، $218^2 = 47524$ ، $219^2 = 47961$ ، $220^2 = 48400$ ، $221^2 = 48841$ ، $222^2 = 49284$ ، $223^2 = 49729$ ، $224^2 = 50176$ ، $225^2 = 50625$ ، $226^2 = 51076$ ، $227^2 = 51529$ ، $228^2 = 51984$ ، $229^2 = 52441$ ، $230^2 = 52900$ ، $231^2 = 53361$ ، $232^2 = 53824$ ، $233^2 = 54289$ ، $234^2 = 54756$ ، $235^2 = 55225$ ، $236^2 = 55696$ ، $237^2 = 56169$ ، $238^2 = 56644$ ، $239^2 = 57121$ ، $240^2 = 57600$ ، $241^2 = 58081$ ، $242^2 = 58564$ ، $243^2 = 59049$ ، $244^2 = 59536$ ، $245^2 = 60025$ ، $246^2 = 60516$ ، $247^2 = 61009$ ، $248^2 = 61504$ ، $249^2 = 62001$ ، $250^2 = 62500$ ، $251^2 = 63001$ ، $252^2 = 63504$ ، $253^2 = 64009$ ، $254^2 = 64516$ ، $255^2 = 65025$ ، $256^2 = 65536$ ، $257^2 = 66049$ ، $258^2 = 66564$ ، $259^2 = 67081$ ، $260^2 = 67600$ ، $261^2 = 68121$ ، $262^2 = 68644$ ، $263^2 = 69169$ ، $264^2 = 69696$ ، $265^2 = 70225$ ، $266^2 = 70756$ ، $267^2 = 71289$ ، $268^2 = 71824$ ، $269^2 = 72361$ ، $270^2 = 72900$ ، $271^2 = 73441$ ، $272^2 = 73984$ ، $273^2 = 74529$ ، $274^2 = 75076$ ، $275^2 = 75625$ ، $276^2 = 76176$ ، $277^2 = 76729$ ، $278^2 = 77284$ ، $279^2 = 77841$ ، $280^2 = 78400$ ، $281^2 = 78961$ ، $282^2 = 79524$ ، $283^2 = 80089$ ، $284^2 = 80656$ ، $285^2 = 81225$ ، $286^2 = 81796$ ، $287^2 = 82369$ ، $288^2 = 82944$ ، $289^2 = 83521$ ، $290^2 = 84100$ ، $291^2 = 84681$ ، $292^2 = 85264$ ، $293^2 = 85849$ ، $294^2 = 86436$ ، $295^2 = 87025$ ، $296^2 = 87616$ ، $297^2 = 88209$ ، $298^2 = 88804$ ، $299^2 = 89401$ ، $300^2 = 90000$ ، $301^2 = 90601$ ، $302^2 = 91204$ ، $303^2 = 91809$ ، $304^2 = 92416$ ، $305^2 = 93025$ ، $306^2 = 93636$ ، $307^2 = 94249$ ، $308^2 = 94864$ ، $309^2 = 95481$ ، $310^2 = 96100$ ، $311^2 = 96721$ ، $312^2 = 97344$ ، $313^2 = 97969$ ، $314^2 = 98596$ ، $315^2 = 99225$ ، $316^2 = 99856$ ، $317^2 = 100489$ ، $318^2 = 101124$ ، $319^2 = 101761$ ، $320^2 = 102400$ ، $321^2 = 103041$ ، $322^2 = 103684$ ، $323^2 = 104329$ ، $324^2 = 104976$ ، $325^2 = 105625$ ، $326^2 = 106276$ ، $327^2 = 106929$ ، $328^2 = 107584$ ، $329^2 = 108241$ ، $330^2 = 108900$ ، $331^2 = 109561$ ، $332^2 = 110224$ ، $333^2 = 110889$ ، $334^2 = 111556$ ، $335^2 = 112225$ ، $336^2 = 112896$ ، $337^2 = 113569$ ، $338^2 = 114244$ ، $339^2 = 114921$ ، $340^2 = 115600$ ، $341^2 = 116281$ ، $342^2 = 116964$ ، $343^2 = 117649$ ، $344^2 = 118336$ ، $345^2 = 119025$ ، $346^2 = 119716$ ، $347^2 = 120409$ ، $348^2 = 121104$ ، $349^2 = 121801$ ، $350^2 = 122500$ ، $351^2 = 123201$ ، $352^2 = 123904$ ، $353^2 = 124609$ ، $354^2 = 125316$ ، $355^2 = 126025$ ، $356^2 = 126736$ ، $357^2 = 127449$ ، $358^2 = 128164$ ، $359^2 = 128881$ ، $360^2 = 129600$ ، $361^2 = 130321$ ، $362^2 = 131044$ ، $363^2 = 131769$ ، $364^2 = 132496$ ، $365^2 = 133225$ ، $366^2 = 133956$ ، $367^2 = 134689$ ، $368^2 = 135424$ ، $369^2 = 136161$ ، $370^2 = 136900$ ، $371^2 = 137641$ ، $372^2 = 138384$ ، $373^2 = 139129$ ، $374^2 = 139876$ ، $375^2 = 140625$ ، $376^2 = 141376$ ، $377^2 = 142129$ ، $378^2 = 142884$ ، $379^2 = 143641$ ، $380^2 = 144400$ ، $381^2 = 145161$ ، $382^2 = 145924$ ، $383^2 = 146689$ ، $384^2 = 147456$ ، $385^2 = 148225$ ، $386^2 = 148996$ ، $387^2 = 149769$ ، $388^2 = 150544$ ، $389^2 = 151321$ ، $390^2 = 152100$ ، $391^2 = 152881$ ، $392^2 = 153664$ ، $393^2 = 154449$ ، $394^2 = 155236$ ، $395^2 = 156025$ ، $396^2 = 156816$ ، $397^2 = 157609$ ، $398^2 = 158404$ ، $399^2 = 159201$ ، $400^2 = 160000$ ، $401^2 = 160801$ ، $402^2 = 161604$ ، $403^2 = 162409$ ، $404^2 = 163216$ ، $405^2 = 164025$ ، $406^2 = 164836$ ، $407^2 = 165649$ ، $408^2 = 166464$ ، $409^2 = 167281$ ، $410^2 = 168100$ ، $411^2 = 168921$ ، $412^2 = 169744$ ، $413^2 = 170569$ ، $414^2 = 171396$ ، $415^2 = 172225$ ، $416^2 = 173056$ ، $417^2 = 173889$ ، $418^2 = 174724$ ، $419^2 = 175561$ ، $420^2 = 176400$ ، $421^2 = 177241$ ، $422^2 = 178084$ ، $423^2 = 178929$ ، $424^2 = 179776$ ، $425^2 = 180625$ ، $426^2 = 181476$ ، $427^2 = 182329$ ، $428^2 = 183184$ ، $429^2 = 184041$ ، $430^2 = 184900$ ، $431^2 = 185761$ ، $432^2 = 186624$ ، $433^2 = 187489$ ، $434^2 = 188356$ ، $435^2 = 189225$ ، $436^2 = 190096$ ، $437^2 = 190969$ ، $438^2 = 191844$ ، $439^2 = 192721$ ، $440^2 = 193600$ ، $441^2 = 194481$ ، $442^2 = 195364$ ، $443^2 = 196249$ ، $444^2 = 197136$ ، $445^2 = 198025$ ، $446^2 = 198916$ ، $447^2 = 199809$ ، $448^2 = 200704$ ، $449^2 = 201601$ ، $450^2 = 202500$ ، $451^2 = 203401$ ، $452^2 = 204304$ ، $453^2 = 205209$ ، $454^2 = 206116$ ، $455^2 = 207025$ ، $456^2 = 207936$ ، $457^2 = 208849$ ، $458^2 = 209764$ ، $459^2 = 210681$ ، $460^2 = 211600$ ، $461^2 = 212521$ ، $462^2 = 213444$ ، $463^2 = 214369$ ، $464^2 = 215296$ ، $465^2 = 216225$ ، $466^2 = 217156$ ، $467^2 = 218089$ ، $468^2 = 219024$ ، $469^2 = 219961$ ، $470^2 = 220900$ ، $471^2 = 221841$ ، $472^2 = 222784$ ، $473^2 = 223729$ ، $474^2 = 224676$ ، $475^2 = 225625$ ، $476^2 = 226576$ ، $477^2 = 227529$ ، $478^2 = 228484$ ، $479^2 = 229441$ ، $480^2 = 230400$ ، $481^2 = 231361$ ، $482^2 = 232324$ ، $483^2 = 233289$ ، $484^2 = 234256$ ، $485^2 = 235225$ ، $486^2 = 236196$ ، $487^2 = 237169$ ، $488^2 = 238144$ ، $489^2 = 239121$ ، $490^2 = 240100$ ، $491^2 = 241081$ ، $492^2 = 242064$ ، $493^2 = 243049$ ، $494^2 = 244036$ ، $495^2 = 245025$ ، $496^2 = 246016$ ، $497^2 = 247009$ ، $498^2 = 248004$ ، $499^2 = 249001$ ، $500^2 = 250000$ ، $501^2 = 251001$ ، $502^2 = 252004$ ، $503^2 = 253009$ ، $504^2 = 254016$ ، $505^2 = 255025$ ، $506^2 = 256036$ ، $507^2 = 257049$ ، $508^2 = 258064$ ، $509^2 = 259081$ ، $510^2 = 260100$ ، $511^2 = 261121$ ، $512^2 = 262144$ ، $513^2 = 263169$ ، $514^2 = 264196$ ، $515^2 = 265225$ ، $516^2 = 266256$ ، $517^2 = 267289$ ، $518^2 = 268324$ ، $519^2 = 269361$ ، $520^2 = 270400$ ، $521^2 = 271441$ ، $522^2 = 272484$ ، $523^2 = 273529$ ، $524^2 = 274576$ ، $525^2 = 275625$ ، $526^2 = 276676$ ، $527^2 = 277729$ ، $528^2 = 278784$ ، $529^2 = 279841$ ، $530^2 = 280900$ ، $531^2 = 281961$ ، $532^2 = 283024$ ، $533^2 = 284089$ ، $534^2 = 285156$ ، $535^2 = 286225$ ، $536^2 = 287296$ ، $537^2 = 288369$ ، $538^2 = 289444$ ، $539^2 = 290521$ ، $540^2 = 291600$ ، $541^2 = 292681$ ، $542^2 = 293764$ ، $543^2 = 294849$ ، $544^2 = 295936$ ، $545^2 = 297025$ ، $546^2 = 298116$ ، $547^2 = 299209$ ، $548^2 = 300304$ ، $549^2 = 301401$ ، $550^2 = 302500$ ، $551^2 = 303601$ ، $552^2 = 304704$ ، $553^2 = 305809$ ، $554^2 = 306916$ ، $555^2 = 308025$ ، $556^2 = 309136$ ، $557^2 = 310249$ ، $558^2 = 311364$ ، $559^2 = 312481$ ، $560^2 = 313600$ ، $561^2 = 314721$ ، $562^2 = 315844$ ، $563^2 = 316969$ ، $564^2 = 318096$ ، $565^2 = 319225$ ، $566^2 = 320356$ ، $567^2 = 321489$ ، $568^2 = 322624$ ، $569^2 = 323761$ ، $570^2 = 324900$ ، $571^2 = 326041$ ، $572^2 = 327184$ ، $573^2 = 328329$ ، $574^2 = 329476$ ، $575^2 = 330625$ ، $576^2 = 331776$ ، $577^2 = 332929$ ، $578^2 = 334084$ ، $579^2 = 335241$ ، $580^2 = 336400$ ، $581^2 = 337561$ ، $582^2 = 338724$ ، $583^2 = 339889$ ، $584^2 = 341056$ ، $585^2 = 342225$ ، $586^2 = 343396$ ، $587^2 = 344569$ ، $588^2 = 345744$ ، $589^2 = 346921$ ، $590^2 = 348100$ ، $591^2 = 349281$ ، $592^2 = 350464$ ، $593^2 = 351649$ ، $594^2 = 352836$ ، $595^2 = 354025$ ، $596^2 = 355216$ ، $597^2 = 356409$ ، $598^2 = 357604$ ، $599^2 = 358801$ ، $600^2 = 360000$ ، $601^2 = 361201$ ، $602^2 = 362404$ ، $603^2 = 363609$ ، $604^2 = 364816$ ، $605^2 = 366025$ ، $606^2 = 367236$ ، $607^2 = 368449$ ، $608^2 = 369664$ ، $609^2 = 370881$ ، $610^2 = 372100$ ، $611^2 = 373321$ ، $612^2 = 374544$ ، $613^2 = 375769$ ، $614^2 = 376996$ ، $615^2 = 378225$ ، $616^2 = 379456$ ، $617^2 = 380689$ ، $618^2 = 381924$ ، $619^2 = 383161$ ، $620^2 = 384400$ ، $621^2 = 385641$ ، $622^2 = 386884$ ، $623^2 = 388129$ ، $624^2 = 389376$ ، $625^2 = 390625$ ، $626^2 = 391876$ ، $627^2 = 393129$ ، $628^2 = 394384$ ، $629^2 = 395641$ ، $630^2 = 396900$ ، $631^2 = 398161$ ، $632^2 = 399424$ ، $633^2 = 400689$ ، $634^2 = 401956$ ، $635^2 = 403225$ ، $636^2 = 404496$ ، $637^2 = 405769$ ، 638

$$= \frac{\frac{\pi}{12} ط + \frac{\pi}{6} ط}{\frac{\pi}{12} ط - \frac{\pi}{6} ط - 1}$$

$$\left[\frac{\pi}{6} ط \quad \frac{\pi}{4} ط \quad \frac{\pi}{2} ط - \quad \frac{\pi}{2} ط \right]$$

$$= \frac{١٥ ط + ٣٠ ط}{١٥ ط - ٣٠ ط - 1}$$

$$[١٥ ط \quad ٣٠ ط - \quad ١٥ ط \quad ٧٥ ط]$$

$$\textcircled{1} \text{ هنا } (٣٥ -) \text{ ما } - (٣٠.٥ -) \text{ ما } - (٣٥ -) \text{ ما } ٥٥ = \dots\dots\dots$$

$$[٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٨٠ \text{ ما}]$$

$$\dots\dots\dots = ٢٥^٢ \text{ ما } + ٢٥ \text{ ما } ٢٥$$

$$[٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٤٠ \text{ ما}]$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كان ط } ٥ = \frac{1}{4} \text{ فان ط } \left(٥ + \frac{\pi}{4} \right) = \dots\dots\dots [١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤]$$

أوجد قيم من المحسوبة بين ٣٦٠°، والتي تحقق المعادلة:

$$\textcircled{1} \text{ ما من هنا } ٤٠ - \text{ هنا من ما } ٤٠ = \frac{1}{4} \quad [٦٠ \quad ٩٠]$$

$$\textcircled{2} \text{ هنا } ٣ \text{ من هنا } ٢ \text{ من ما } ٢ \text{ من ما } ٣ \text{ من ما } ٢ \text{ من ما } ٣ = \frac{3}{4} \quad [٢٠ \quad ٤٠ \quad ٦٠]$$

$$\textcircled{3} \text{ هنا } ٥٢ \text{ هنا } ٨ - \text{ ما } ٥٢ \text{ ما } ٨ = \text{ ما من } \quad [٦٠ \quad ٩٠]$$

$$\textcircled{4} \text{ ط - ط } ٢٢ \quad ١ = \frac{\text{ط } ٢٢ \quad ١٥}{٢٢ \quad ١٥ \text{ ط } + ١} \quad [٣٣٧ \quad ١٥ \quad ١٥٧ \quad ١٥]$$

برهن بحسب أرقام التقادير التالية لا تتوقف على من :

$$\textcircled{1} \text{ هنا } (٧٥ + \text{س}) \text{ هنا } (٤٥ + \text{س}) + \text{ ما } (٧٥ + \text{س}) \text{ ما } (٤٥ + \text{س})$$

$$\textcircled{2} \frac{\text{ط } (٨٥ \quad ١٧ + \text{س}) - \text{ ط } (٤٠ \quad ١٧ + \text{س})}{١ + \text{ط } (٨٥ \quad ١٧ + \text{س}) \text{ ط } (٤٠ \quad ١٧ + \text{س})}$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\textcircled{1} \text{ ما } ٥٠ = \text{ هنا } ٨٠ + \text{ هنا } ٢٠ \quad \textcircled{2} \text{ ما } ٢٦ = \text{ هنا } ٥٦ + \text{ هنا } ٤$$

$$\textcircled{3} \text{ هنا } ٢٥ = \text{ ما } ١٢٥ - \text{ ما } ٥ \quad \textcircled{4} \text{ ط } ٨٠ - \text{ ط } ٢٥ - \text{ ط } ٨٠ = ١ = \text{ ط } ٣٥$$

$$\textcircled{5} \frac{\text{ما } ٢ \text{ من هنا } ٢ \text{ من - هنا } ٢ \text{ من ما } ٢ \text{ من}}{\text{ هنا } ٣ \text{ من هنا } ٢ \text{ من + ما } ٣ \text{ من ما } ٢ \text{ من}} = \text{ ط - س}$$

١٦٦ بدور استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} &= 75^\circ \quad \textcircled{2} \quad \sqrt{3}+2=75^\circ \\ \textcircled{3} \quad \frac{50^\circ \text{ ط} + 1}{50^\circ \text{ ط} - 1} &= 50^\circ \quad \textcircled{4} \quad \frac{50^\circ \text{ ط} - 1}{50^\circ \text{ ط} + 1} = (1-50^\circ) \text{ ط} \\ \textcircled{5} \quad \frac{50^\circ \text{ ط} + 1}{50^\circ \text{ ط} - 1} &= \frac{(50^\circ - 1) \text{ ط} + (50^\circ + 1) \text{ ط}}{(50^\circ - 1) \text{ ط} + (50^\circ + 1) \text{ ط}} \\ \textcircled{6} \quad 50^\circ \text{ ط} &= (50^\circ - 1) \text{ ط} + (50^\circ + 1) \text{ ط} \\ \textcircled{7} \quad 50^\circ \text{ ط} &= (50^\circ - 1) \text{ ط} + (50^\circ + 1) \text{ ط} \\ \textcircled{8} \quad \frac{1}{4} &= \frac{\pi}{44} \text{ ط} + \frac{\pi}{44} \text{ ط} + \frac{\pi}{44} \text{ ط} \\ \textcircled{9} \quad 50^\circ \text{ ط} &= 50^\circ \text{ ط} + 50^\circ \text{ ط} \end{aligned}$$

١٦٧ أختصر لأبسط صورة : $50^\circ \text{ ط} + 1 + (50^\circ + 1) \text{ ط} + 1$

١٦٨ بدور استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 50^\circ \text{ ط} &= (50^\circ + 50^\circ) \text{ ط} - (50^\circ + 50^\circ) \text{ ط} \\ \textcircled{2} \quad 50^\circ \text{ ط} &= (50^\circ + 50^\circ) \text{ ط} - (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط} \\ \textcircled{3} \quad \frac{50^\circ \text{ ط} - 1}{50^\circ \text{ ط} - 1} &= (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط} + (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط} \\ \textcircled{4} \quad 50^\circ \text{ ط} &= (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط} + (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط} \end{aligned}$$

١٦٩ إذا كان $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$ ، $\frac{1}{4} = (50^\circ - 50^\circ) \text{ ط}$ ، حيث 50° ، من قياسات زاويتين حادتين

أثبت أن : $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$

١٧٠ إذا كان $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$ ، حيث $50^\circ > 50^\circ$ ، $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$ ، حيث $50^\circ > 50^\circ$ ، أثبت أن : $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$

١٧١ إذا كان $50^\circ \text{ ط} = (50^\circ + \theta)$ ، أوجد قيمة θ

١٧٢ إذا كان $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$ ، $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$ ، حيث $50^\circ > 50^\circ$ ، من قياسات زاويتين حادتين ، أثبت أن : $50^\circ \text{ ط} = 50^\circ$

ج ۱۰۹) ادا کے لیے $\frac{1}{4}$ ، دینا $\frac{1}{4}$ ہوتا ہے $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، جبکہ $\frac{1}{4}$ ، بقیہ کے زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔
 لہذا ہمہ شکل میں ہوتا ہے $(1 + \frac{1}{4})$ ، ہوتا ہے $(1 - \frac{1}{4})$ [۱۰۹]

١.١ إذا علمت أن $\frac{م}{ب} = \frac{ب+١}{ب-١}$ فائت أن: ٢ ما أ ما ب = م ما أ ما ب ثم
 ايت أن: ٢ ما ب = م وإذا علمت أن ما $\frac{٢}{ب} = ١$
 فوجد ما ب ومن ثم أوجد ما $(ب-١)$

[illegible]

ثبت ان: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ حيث a, b, c هي قياسات زوايا \triangle

نقطة: إذا كان $m + b + c = 90^\circ$ حيث a, b, c هي قياسات زوايا حادة
فإن: $a + b + c = 180^\circ$

📌 إذا كان ٣ معنا $(1 + 1) = 2$ معنا $(1 - 1)$ أنيبي أن: طأ طأ طأ $\frac{1}{8} = 1$

مثال: اگر $(x + \frac{1}{x})^n = 2^{n+1}$ ہو تو n کی قیمت معلوم کریں۔

إذا كان Δ م م فيه $\frac{1}{9} = 1$ ، $\frac{2}{3} = 2$ فأوجد : Δ (د هـ)

أثبت أن: $\frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$

تذکرہ ان کا مطالعہ = ص ۶۵ سے ثابت ان : ص ۲ - ۳۷۴ سے ۹ = ۱۔

مثال (2) إذا كانت شدة التيار الكهربائي I تعطى بالعلاقة $I = \frac{E}{R}$ فما $\frac{dI}{dt}$ إذا كان $\frac{dE}{dt} = 160$ و $R = 10$ ؟

- ١) أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسى زاويتين.
٢) أوجد شدة التيار الكهربى بعد ثالثة واحدة (دون استخدام الحاسبة)

① إذا كان من من في مثلث

$$\text{هذان هما } \left(\frac{س + ص}{٤} \right) \text{ هنا } + \frac{ع}{٤} \text{ هنا } \left(\frac{س + ص}{٤} \right) \text{ هنا } = \frac{ع}{٤}$$

[صفر ۱۰۰۰]

(۲) إذا كان هنا $\left(\frac{u+1}{y}\right)$ هنا $+ \text{ها}$ $\left(\frac{u-1-y}{y}\right)$ ها $-$

[صفر] - ۱ - ۲ - ۳

(٢) إذا كانت $\pi \in \pi_1(X, x_0)$ فإن قيمة π التي تجعل قيمة المقدار

ہا جن ونا ۱۵° + ونا س ۱۴° اصغر ما یمن ہی

$$^{\circ}\text{Ta} \quad \text{d} \quad ^{\circ}\text{Ta} \quad \text{d} \quad ^{\circ}\text{V} \quad \text{d} \quad ^{\circ}\text{V}$$

④ إذا كانت $s \in [\pi, 2\pi]$ فإن قيمة s التي تجعل قيمة المقدار

میتا من میتا ۲۰ + ما س ما ۲۰ اکبر ما یکن هی

[^०५०. ६] ^०५०. ६] ^०५०. ६] ^०५०. ६]

⑤ (اذا كان $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{q}$ ، $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{q}$ ، $\frac{1}{p} = s + \frac{1}{q}$)

هذان هما (س + ص) =

(٦) إذا كان t_0 هو الحل العام $y' = f(x)$ ، فإن $\frac{d}{dx} \left(\frac{y^2}{2} - t_0 y \right) = y^2 - t_0^2$

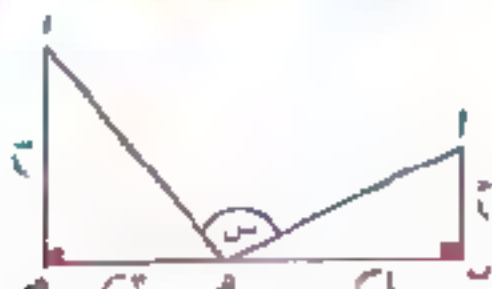
$$[r \text{ d } \frac{r}{v} \text{ d } r \frac{v}{r} \text{ d } r \sqrt{r}]$$

(۷) إذا كان $\frac{1}{x} = (u + 1)$ ، $\frac{1}{y} = (u + 1)$ ، $\frac{1}{z} = (u + 1)$ فإن $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = (u + 1) + (u + 1) + (u + 1) = 3(u + 1)$

$$\left[\frac{(1-\sqrt{7})^2}{10} \quad \< \quad \frac{(1+\sqrt{7})^2}{10} \quad \< \quad \frac{7}{10} \quad \< \quad \frac{7}{10} + 1 \right]$$

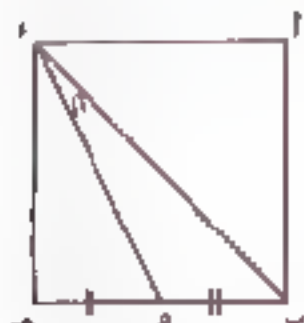
Ⓐ) إذا كان ما $\frac{1}{p} = (b + 1)$ ، ما $\frac{1}{q} = (b - 1)$ فإن ما $\frac{1}{r} = b$

$$\left[\frac{0}{11} \text{ d } \frac{1}{2} \text{ d } \frac{0}{14} \text{ d } \frac{0}{5} \right]$$



١٠ في الشكل المقابل:
 $AB = 11$ سم، $BC = 25$ سم
 $DE = 9$ سم، $CE = 25$ سم
 فإن ما $(\angle D)$ =

$\left[\frac{511}{25} \text{ د } \frac{512}{25} \text{ د } \frac{519}{25} \text{ د } \frac{526}{25} \right]$



١١ في الشكل المقابل:
 AB مربع
 $BC = CD$
 $\theta = (\angle B)$
 فإن ما θ =

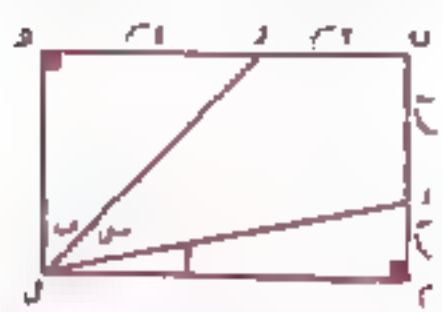
$\left[\frac{1}{5} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \right]$

١١ إذا كان $\theta = 60^\circ$ فإن ما $\theta = 40^\circ$
 $\left[\frac{1-2}{1} \text{ د } \frac{1+2}{1} \text{ د } \frac{1}{1} \text{ د } \frac{1}{1} \right]$



١٢ في الشكل المقابل:
 $\angle A = 60^\circ$
 $\angle B = 40^\circ$
 $\angle C = 80^\circ$
 ما $(\angle D)$ =

$\left[\frac{51}{4} \text{ د } \frac{52}{4} \text{ د } \frac{53}{4} \text{ د } \frac{54}{4} \right]$



١٣ في الشكل المقابل:
 AB مستطيل، $BC = 11$ سم، $CD = 25$ سم
 $DE = 9$ سم، $CE = 25$ سم
 $\angle D = 60^\circ$
 فإن ما θ =

$\left[\frac{11}{47} \text{ د } \frac{1}{47} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{27}{11} \right]$

(١٤) في الشكل المقابل:

$$ا = ٤٠^\circ، سم ا = ١٠، سم ب = ٢، سم ج = ٨،$$

$$د = ١٧، سم ا ب = (١٥ + ٥) = ٢٠$$

$$ق = (د + ج) = ٢٧$$

$$س = (د + ج) = ٢٧$$

فلنحسب

$$\left[\frac{١٧}{٨٥}، \frac{٨}{١٧}، \frac{٢٢}{٨٥}، \frac{٩}{١٧} \right]$$

$$(١٥) \text{ إذا كان } \frac{٢}{٣} \text{ هنا س + هنا س = ١ فلان ق (٣٠ - س) = ...}$$

$$\left[\frac{٢}{٣}، ١ - \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٣}، ٢ - \frac{١}{٣} \right]$$

$$(١٦) \text{ إذا كان س من ص مثلث فيه ٣ طنا س = ٤، طنا س = ٧ فلان ق (٤) = ...}$$

$$[٣٠^\circ، ٤٥^\circ، ١٢٠^\circ، ١٣٥^\circ]$$

$$(١٧) \text{ إذا كان ا، ب، ج زوايا حادة وكان طنا ا = } \frac{١}{٢}، \text{ طنا ب = } \frac{١}{٥}، \text{ طنا ج = } \frac{١}{٨}$$

$$\text{فلان ق (د) + ق (ب) + ق (ج) = ...}$$

$$\left[\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٣}، \frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٥} \right]$$

$$(١٨) \text{ إذا كان ٤ هنا (س + س) = ٣ هنا (س - س) فلان طنا س طنا س = ...}$$

$$\left[\frac{١}{٢}، ٧، ١٢، ١ \right]$$

$$(١٩) \text{ إذا كان ا + ب + ج = ٩٠ فلان طنا ا طنا ب + طنا ب طنا ج + طنا ج طنا ا = ...}$$

$$\left[\frac{١}{٢}، ١، \frac{١}{٢}، ٢ \right]$$

$$(٢٠) \text{ اختصر هنا (س + } \frac{\pi}{٣} \text{) هنا } \frac{\pi}{٣} - \text{ هنا (س + } \frac{\pi}{٣} \text{) هنا } \frac{\pi}{٣}$$

$$(٢١) \text{ إذا كان ا، ب قياسا زاويتين بحيث ا + ب = ١٢٠، ٢ هنا (١ - \sqrt{٣}) هنا ب}$$

ما هو

فاوجد قيمة كل من ا، ب

$$(٢٢) \text{ في } \Delta ا ب ج اثبت ان: طنا ا طنا ب + طنا ب طنا ج + طنا ج طنا ا = ١$$

$$(٢٣) \text{ في } \Delta ا ب ج إذا كان هنا ا = \frac{١٧}{٢٢}، هنا ج = \frac{١}{١٤} \text{ فاوجد ا، ب، ج}$$

$$\text{مثال ١: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٢: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٣: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٤: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٥: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٦: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٧: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٨: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\text{مثال ٩: } \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2} = \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n-1}$$



الدوال المثلثية لتضعف الراوية

الأكريل

٣

الدوال المثلثية لتضعف الراوية

لنعلم أن

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\therefore \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a$$

$$\therefore \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{لكل } a \in \mathbb{R}$$

بمثل يكون

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{لكل } a \in \mathbb{R}$$

$$2 = \frac{\sin 2a}{\sin a \cos a}$$

$$2 = \frac{\sin 2a}{\sin a \cos a}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{حيث } \sin a \neq 0 \text{، } \cos a \neq 0$$



وأيضا مكتوبة صورة القوانين السابقة إذا ضاعفنا الراوية ٢ / لتصبح ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠
مكتوبتها إذا نصفنا الراوية ٢ / لتصبح ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠

ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢
ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢	ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢

جدول المثلثية الضعف الراوية

سبق وان علمت ان ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ (متطابقة ضعف الراوية)

اي ان ما ١ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ (من خواص المقادير الدورية)

ما ١/٢ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ (بفرضه الطرفين على ٢)

ما ١/٢ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ (بالحل يمكن إيجاد الدوال المثلثية لكل من ما ١/٢ ، ما ١/٢)

ما ١/٢ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ ، ما ١/٢ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢ ، ما ١/٢ = ٢ ما ١/٢ ما ١/٢

حيث ما ١ ≠ ٢ يتم تحديد الإشارة وطبقا للربع الذي تقع فيه الراوية ١/٢

وسنذكر كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة قبله.

○ إذا كان حل المعادلة $\theta = \theta$ في الفترة $[\pi, 2\pi]$ هو α, β
فإن الحل العام للمعادلة هو $\pi + 2 + \alpha = \theta$ أو $\pi + 2 + \beta$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$
مع ملاحظة أنه إذا كانت $\theta = 0$ يكون الحل العام $\pi + 2 = \theta$

○ إذا كان حل المعادلة $\theta = \theta$ في الفترة $[\pi, 2\pi]$ هو $\alpha - \alpha$
فإن الحل العام للمعادلة هو $\pi + 2 + \alpha \pm \theta$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$
مع ملاحظة أنه إذا كانت $\theta = 0$ يكون الحل العام $\pi + 2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

○ إذا كان حل المعادلة $\theta = \theta$ في الفترة $[\pi, 2\pi]$ هو $\pi + \alpha, \alpha$
فإن الحل العام للمعادلة هو $\pi + 2 + \alpha - \theta$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

فمثلاً

بريد الحل العام للمعادلة $\theta = \frac{1}{4}$ فإننا نلاحظ أن θ موجبة

أي أن θ تقع في الربع الأول أو الثاني

○ الزاوية الحادة التي جيبها $\frac{1}{4}$ قياسها 14.0°

وحيث أن θ تقع في الربع الأول أو الثاني فإن $\theta = 14.0^\circ$ أو $\theta = 180^\circ - 14.0^\circ = 166.0^\circ$

أي أن $\frac{\pi}{4} = \theta$ أو $\pi + \frac{\pi}{4} = \theta$ أي $(\pi + \frac{\pi}{4})$

لاحظ أن $(\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{180} \times 166.0 = 166.0^\circ)$

ويكون الحل العام للمعادلة هو: $\pi + 2 + \frac{\pi}{4}$ أو $\pi + 2 + \pi + \frac{\pi}{4}$

أي $\pi + 2 + \pi + \frac{\pi}{4}$

مثال

إذا كان $\sin \theta = \frac{4}{5}$ حيث $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ فأوجد قيمة كل من: $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\sec \theta$

الحل

\because قياس زاوية تقع في الربع الثاني، $\sin \theta = \frac{4}{5}$

$$\therefore \sin \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \Rightarrow y = 4, r = 5$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \Rightarrow x = -3$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد $\cos \theta$ بطريقة أخرى

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \Rightarrow x = -3$$

مثال

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{3}$ فأوجد قيمة كل من $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ ، $\sec \theta$

الحل

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 1, r = 3$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$\sqrt[3]{(37-2)} = \frac{\sqrt[3]{(37-2)}}{3-4} = \frac{37-2}{37-2} \times \frac{37+2}{37+2} =$$

$$\boxed{37-2=95} \text{ ط .}$$

(يمكن استخدام القاعدة التالية مباشرة ط ٩٥ = $\frac{95}{95+1}$ ما ٣٠)

مثال

يقوم استخدام الآلة الحاسبة البت أن

$$\textcircled{1} \frac{\text{ما } 50 - \text{ما } 40}{\text{ما } 22 \times 30} = \frac{\text{ما } 50 - \text{ما } 40}{\text{ما } 22 \times 30}$$

$$\textcircled{2} 1-2 \text{ ما } \left(\frac{\pi}{2} - \text{س} \right) = 2 \text{ ما } 2 \text{ س}$$

$$\textcircled{3} 1 = \frac{2 \text{ ما } 22 \times 30}{2 \text{ ما } 22 \times 30 - 1}$$

الحل

$$\textcircled{1} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{22} \times \frac{1}{30}} = \frac{\text{ما } 30}{\text{ما } 45} = \frac{(\text{ما } 10 - \text{ما } 50)}{\text{ما } 45} = \frac{\text{ما } 10 - \text{ما } 50}{\text{ما } 45}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \frac{1}{4} = \frac{1}{22} \times \frac{1}{30} =$$

$$\textcircled{2} \text{الطرف الأيمن} = 2 \text{ ما } \left(\frac{\pi}{2} - \text{س} \right) = 2 \text{ ما } \left(\frac{\pi}{2} - \text{س} \right)$$

$$= 2 \text{ ما } (2 - \text{س}) = 2 \text{ ما } 2 \text{ س} = \text{الطرف الأيسر}$$

$$\textcircled{3} \text{الطرف الأيمن} = 2 - 2 \text{ ما } 22 \times 30 =$$

$$= 2 - 2 \text{ ما } 45 = 1 - 2 \text{ ما } 45 = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال ٧

أثبت صحة المتطابقات الآتية:

$$① \text{ فتا } ٢ - \text{ طتا } ٢ = ١$$

$$② \text{ ما } ٢ \text{ س } ٢ + \text{ فتا } ٢ \text{ س } ٢ = ١$$

$$③ \text{ ما } ٢ \text{ س } ٢ - \text{ ما } ٢ \text{ س } ٢ = \frac{\text{طتا } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢ + \text{ فتا } ٢ \text{ س } ٢}$$

الحل

الخطوة ١

عند إثبات صحة متطابقتين
يفصل البدء بالطرف الأكبر
ويفصل تلك دالة ضعف الزاوية
بالقوانين

$$① \text{ الطرف الأيمن} = \frac{١}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢} - \frac{\text{فتا } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢}$$

$$= \frac{(١ - \text{فتا } ٢ \text{ س } ٢) - \text{فتا } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = ١ = \frac{\text{ما } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢} = \frac{\text{ما } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢}$$

$$② \text{ الطرف الأيسر} = \text{ما } ٢ \text{ س } ٢ + \text{ فتا } ٢ \text{ س } ٢ = ١ = \text{الطرف الأيسر}$$

$$③ \text{ الطرف الأيمن} = \frac{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢ - \text{ ما } ٢ \text{ س } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢ + \text{ فتا } ٢ \text{ س } ٢}$$

$$= \frac{(١ - \text{فتا } ٢ \text{ س } ٢) - \text{ فتا } ٢}{(١ - \text{فتا } ٢ \text{ س } ٢) + ١} = \frac{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢ - \text{ ما } ٢ \text{ س } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢ + \text{ فتا } ٢ \text{ س } ٢}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = ١ = \frac{\text{ما } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢} = \frac{\text{ما } ٢}{\text{ما } ٢ \text{ س } ٢}$$

مثال

إبراهيم منا ١ + ما ١ = $\frac{1}{4}$ مكتوبه قيمة: ما ٢ ثم أوجد قنا ١ - قنا ١

الحل

بتربيع الطرفين $\frac{1}{4} = 2(1 - \text{ما } 1)$ \therefore

$$\therefore \text{ما } 1 + 1 - \text{ما } 1 = 2 - 1 \therefore \frac{1}{4} = 1 - \text{ما } 1$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{4} = \text{ما } 1 \therefore \frac{3}{4} = \text{ما } 1$$

$$\text{قنا } 1 - \text{قنا } 1 = \frac{1}{\text{ما } 1} - \frac{1}{\text{ما } 1} = \frac{1 - 1}{\text{ما } 1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4} \times 2}{\frac{3}{4}} = \frac{(1 - 1) \times 2}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال

أثبت ان: $\frac{12}{\text{ما } 1} - \frac{12}{\text{ما } 1} = \text{قنا } 1$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{12}{\text{ما } 1} - \frac{12}{\text{ما } 1}$ بتوحيد المقامات

$$= \frac{12 - 12}{\text{ما } 1} = \frac{0}{\text{ما } 1} = 0$$

$$= \frac{1}{\text{ما } 1} = \text{قنا } 1 = \text{الطرف الأيسر}$$

مثال (١٠)

أثبت أن: $\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\pi}{8}$ إذا كان $\frac{1}{12}$ وسنجد قيمة: $\frac{\pi}{8}$

الحل

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{1^2 - 1^2}{12 \times 12} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{(1^2 - 1^2) - 1}{12 \times 12} = \frac{\pi}{8}$$

$$1 - \sqrt{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - 1 \right) \sqrt{1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1}}} = \frac{\frac{\pi}{8} - 1}{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{8}$$

مثال (١١)

أثبت أن: $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ إذا كان $\frac{1}{4} = (1 + \frac{1}{4}) = 1$ وكل $\frac{1}{4} = 1$

الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{1^2 \times 2}{1^2 \times 4} = \frac{1 \times 2}{1^2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1 \times 2 + 1 \times 2}{1 \times 2 + 1 \times 2} = (1 + 1) = 2$$

$$1 = \frac{1 \times 2 + \frac{1}{4}}{1 \times 2 - 1} = \frac{1 \times 2 + \frac{1}{4}}{1 \times 2 - 1}$$

$$\frac{1}{4} - 1 = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1$$

$$\frac{1}{4} - 1 = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times 1$$

$$\frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4}$$

مثال ١١

أوجد قيم π المحصورة بين 0 و 2π والتي تحقق المعادلة:

$$\sin \pi + \sin 2\pi = 1$$

الحل

$$\therefore \sin \pi + \sin 2\pi = 1$$

$$\therefore \sin \pi + \sin 2\pi = 1$$

$$0 = (1 + \sin \pi)(1 - \sin \pi)$$

$$\text{إما } \sin \pi = \frac{1}{2} \text{ أو } \sin \pi = -1$$

\therefore تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\therefore \sin \pi = \frac{1}{2} \text{ (عدد موجب)}$$

\therefore الزاوية الموجبة التي جيب تمامها $= \frac{1}{2}$ هي 60°

$$\therefore \sin \pi = 60^\circ \text{ (الربع الأول) أو } \sin \pi = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ \text{ (الربع الرابع)}$$

$$\therefore \sin \pi = 300^\circ$$

$$\therefore \sin \pi = -1$$

\therefore قيم π التي تحقق المعادلة هي $60^\circ, 300^\circ, 360^\circ$

حل آخر

$$\text{نوجد الصورة العامة } \sin \pi = \frac{1}{2} \text{ أو } \sin \pi = -1$$

ويضع $\pi = 0$... نوجد القيم التي تحقق المعادلة



مسائل المستوى الأول

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2 \text{ ما } 15^\circ \text{ ما } 60^\circ & \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad 2 \text{ ما } 22^\circ 30' \text{ ما } 22^\circ 30' \\ \textcircled{2} \quad 2 \text{ ما } 22^\circ 30' 2 - 10^\circ & \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right] \quad 2 \text{ ما } 75^\circ - 75^\circ \\ \textcircled{3} \quad \frac{2 \text{ ما } 60^\circ}{2 \text{ ما } 60^\circ - 1} & \quad \left[\begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right] \quad \frac{2 \text{ ما } 22^\circ 30' 2}{2 \text{ ما } 22^\circ 30' 2 - 1} \\ \textcircled{4} \quad \frac{2 \text{ ما } 13^\circ \text{ ما } 27^\circ + 2 \text{ ما } 43^\circ \text{ ما } 27^\circ}{2 \text{ ما } 43^\circ \text{ ما } 27^\circ} & \end{aligned}$$

(٣) إذا كان $\frac{2}{3} = 1$ ، حيث $\frac{2}{3} > 1$ ، فأوجد القيمة: ما 12° ، ما 12° ، ما 12° $\left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right]$

(٤) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من ما 2° ، ما 2° ، ما 2° إذا كان:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 90^\circ > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{2} - \theta \\ \textcircled{2} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{4} = \theta \\ \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > \pi & \quad \frac{\pi}{4} - \theta \\ \textcircled{4} \quad 180^\circ > \theta > 270^\circ & \quad \frac{\pi}{4} = \theta \end{aligned}$$

(٥) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: ما 2° ، ما 2° ، ما $\frac{\pi}{4}$

ما $\frac{\theta}{4}$ إذا كان:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 90^\circ > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{2} = \theta \\ \textcircled{2} \quad 180^\circ > \theta > 90^\circ & \quad \frac{\pi}{2} = \theta \\ \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > \pi & \quad \frac{\pi}{4} = \theta \\ \textcircled{4} \quad \pi > \theta > \frac{\pi}{4} & \quad \frac{15}{14} = \theta \end{aligned}$$

أشهر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة،

$$① \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ = \dots\dots\dots [\text{ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠]$$

$$② \text{ ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ = \dots\dots\dots$$

$$[\frac{1}{4} \text{ ما } ٧٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٧٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٧٠]$$

$$③ \text{ ما } ٢٥ - \text{ ما } ٢٥ = \dots\dots\dots [\text{ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠]$$

$$④ ٢-١ \text{ ما } ٤٠ = \dots\dots\dots$$

$$[\frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠]$$

$$⑤ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٤٠}{١٠٠ \text{ ما } - ١}$$

$$[\frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } \frac{1}{4} \text{ ما } ٨٠]$$

$$⑥ \dots\dots\dots = \frac{٢٢٢٠ \text{ ما } ٢}{٢٢٢٠ \text{ ما } - ١}$$

$$[\text{ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠]$$

$$⑦ \text{ ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ - \text{ ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ = \dots\dots\dots$$

$$[- \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } - \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } - \text{ ما } ٦٠]$$

$$⑧ \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ + \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ = \dots\dots\dots$$

$$[- \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } - \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } - \text{ ما } ٢٠]$$

$$⑨ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ١٠ - \text{ ما } ١٠}{١٠ \text{ ما } + ١}$$

$$[\text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠]$$

$$⑩ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٧٠ - ١}{٩٠ \text{ ما } + ٧٠}$$

$$[\text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٩٠]$$

$$⑪ \dots\dots\dots = \frac{٥٢ \text{ ما } + ٥٢ \text{ ما } - ١}{٥٢ \text{ ما } + ٥٢ \text{ ما } + ١}$$

$$[\text{ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠]$$

$$⑫ \dots\dots\dots = \frac{٥ \text{ ما } + ٥ \text{ ما } - ١}{٥ \text{ ما } + ٥ \text{ ما } + ١}$$

$$[\frac{٥}{4} \text{ ما } ٥٢ \text{ ما } \frac{٥}{4} \text{ ما } ٥٢]$$

③ \log ما هنا 1

$$\left[\log \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \text{ ك } \log 12 \text{ ك } \log \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\left[\log \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \text{ ك } \log 12 \text{ ك } \log 12 \text{ ك } \log \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \right] \dots = \frac{\log 1}{1 - 1^2}$$

$$\text{④ إذا كان ما } 1 = \frac{\log 1}{0} \text{ فإن ما } 12 = \dots$$

$$\left[\log \frac{1}{8} \text{ ك } \log \frac{1}{8} \text{ ك } \log \frac{1}{8} \text{ ك } \log \frac{1}{8} \right]$$

$$\text{⑤ إذا كانت ما } 1 = \frac{1}{4} \text{ فإن ما } 2 = \dots$$

$$\left[\log \frac{1}{4} \text{ ك } \log \frac{1}{4} \text{ ك } \log \frac{1}{4} \text{ ك } \log \frac{1}{4} \right]$$

$$\text{⑥ } 2 \text{ ما } 10^2 - 1 = \dots \left[2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \right]$$

$$\dots = 2 \cdot 10^2 - 1$$

$$\left[2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \right]$$

$$\text{⑦ } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 = \dots$$

$$\left[2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \text{ ك } 2 \text{ ما } 10^2 \right]$$

$$\text{⑧ إذا كان ما } 2 = \frac{2}{3}, \text{ من } 3 \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \text{ فإن ما } 2 \text{ من } 3 = \dots$$

$$\left[1 \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } 1 \right]$$

$$\left[\log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \right] \dots = 10^2 \text{ ما } 10^2$$

$$\text{⑨ } \log 10 = \dots \left[\log 10 \text{ ك } \log 10 \text{ ك } \log 10 \text{ ك } \log 10 \right]$$

$$\dots = \frac{1}{10} \text{ ما } 10^2 = \dots$$

$$\left[\log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \right]$$

$$\left[1 \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \text{ ك } \log \frac{1}{10} \right] \dots = \frac{\log 10}{(10^2 + 1)(10^2 - 1)}$$

$$\text{⑩ } 10^2 \text{ ما } 10^2 = \dots$$

$$\left[10^2 \text{ ك } 10^2 \text{ ك } 10^2 \text{ ك } 10^2 \right]$$

$$\text{⑪ } 10^2 \text{ ما } 10^2 = \dots$$

$$\left[10^2 \text{ ك } 10^2 \text{ ك } 10^2 \text{ ك } 10^2 \right]$$

11) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ أوجد كل من ما ١٢، هنا ١٢

12) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ أوجد كل من ما ١٢، هنا ١٢

13) إذا علمت أن ما $\frac{5}{13} = 1$ حيث قياس زاوية حادة أوجد بدون استخدام الآلة

الحاسبة قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢

14) إذا كانت ما $\frac{\pi}{4} > \pi$ حيث $\frac{3}{5} = 1$ من ٣، من ٣

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

15) إذا كانت ما $\frac{\pi}{4} > \pi$ حيث $\frac{3}{5} = 1$ من ٣، من ٣

أوجد ١، هنا ٢، هنا ٢

16) إذا كانت ما $\frac{\pi}{4} > \pi$ حيث $\frac{3}{5} = 1$ من ٣، من ٣

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

17) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

18) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة

قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢

19) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ما $1 = (2 + 2)$

20) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ما $1 = (2 + 2)$

21) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ما $1 = (2 + 2)$

22) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ما $1 = (2 + 2)$

23) إذا كان ما $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$ فثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن ما $1 = (2 + 2)$

$$(11) \quad \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta$$

$$(12) \quad \frac{1 - \sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad (13) \quad \frac{\sin 2\theta}{1 - \sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$(14) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \text{ومن ذلك أوجد قيمة: } \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$(15) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad (16) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$(17) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$(18) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad \text{ومن ذلك أوجد قيمة } \theta \text{ بدون استخدام الآلة الحاسبة}$$

$$(19) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad (20) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

(21) إذا كان $\theta = 45^\circ$ ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة $\sin \theta$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة.

(22) إذا كان $\theta = 45^\circ$ ، فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن $\frac{1}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة.

(23) أوجد قيم \sin المحصورة بين 0° و 90° والتي تحقق كل معادلة مما يأتي:

$$(1) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (2) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (4) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (6) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(7) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (8) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (10) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(11) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

(24) إذا كان $\theta = 45^\circ$ ، فأوجد بدون استخدام حاسبة الجيب قيمة $\sin \theta + \cos \theta$

$$(25) \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$$

المعادلة الأصلية المتكافئة لـ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

أثبت أن $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) ومن ذلك وبدون استخدام الآلة الحاسبة
أوجد قيمة $\sin \theta$

$$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right]$$

أثبت أن $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) ومن ذلك استنتج قيمة $\sin \theta$

$$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right]$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة.

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فأوجد قيمة θ

$$\left[\frac{\pi}{6} \right]$$

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فأوجد θ (د)
ثم أثبت أن: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ = صفر

$$\left[\frac{\pi}{6} \right]$$

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فقياساً زاويتان حادتان موجبتان
فأثبت أن: $\sin \theta = \frac{1}{2}$

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) أثبت أن: $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$$\left[\frac{\pi}{6} \right]$$

أب هـ مثلث فيه $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) أوجد θ ، $\sin \theta$ ، $\cos \theta$

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) فقياساً زاوية موجبة وكان $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ فأوجد قيمة $\sin \theta$ من:

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ ما } (12 - 12) \text{ ما } (90 - 12) \text{ ما } (390 - 12)$$

إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$) من فائت أن: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ (1 + $\sin \theta$)

شكل لاعب كرة القدم مزاوية قياسها 30° مع سطح الأرض ويسرعه ابتدائية
مقدارها 14.7 م/ث إذا كانت المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة

$$s = \frac{22}{5} \sin \theta \text{ ما } \theta \text{ حيث } s \text{ عجلة المقطوع الحر وتساريف } 9.8 \text{ م/ث}^2 \text{ ع.}$$

السرعة الابتدائية

① ضع العلاقة السابقة في أبسط صورة.

② أوجد المسافة الأفقية في التي تقطعها الكرة بالتر

$$\left[\frac{\pi}{6} \right]$$

مسائل نفيس مستويان عليا من التفكير

١٦) أختبر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

١) إذا كان منا $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = 0.36$ فإن منا $0.72 = \dots\dots\dots$

$\left[\frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right]$

٢) إذا كان m ب د مثلث فيه $a^2 = 1 + b^2$ فإن منا 2 د $\dots\dots\dots$

$\left[\frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \right]$

٣) إذا كان $\tan 2 = \frac{2}{3}$ فإن $\sin 2 = \dots\dots\dots$ حيث $0 < 2 < 90$

$\left[\frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

٤) إذا كان $\tan 2 = \frac{2}{3}$ فإن $\sin 4 = \dots\dots\dots$

$\left[\frac{2}{5} \text{ د } \frac{3}{5} \text{ د } \frac{4}{5} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

٥) إذا كان $\sin 2 = \frac{1}{2}$ فإن $\cos 2 = \dots\dots\dots$ ($0 < 2 < 90$)

$\left[\frac{1}{2} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{2} \right]$

٦) $\frac{1}{1+\sin 2} = \dots\dots\dots$ $\left[\frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

٧) إذا كان $\sin 2 = \frac{2}{3}$ فإن $\cos 2 = \dots\dots\dots$ حيث $0 < 2 < 90$

فإن $\sin 3 = \sin 2 + \cos 2 = \dots\dots\dots$

$\left[\frac{5}{6} \text{ د } \frac{11}{6} \text{ د } \frac{13}{6} \text{ د } \frac{7}{6} \right]$

١٧) إذا كان $\sin 2 = \frac{1}{2}$ فإن $\cos 2 = \dots\dots\dots$ حيث $0 < 2 < 90$

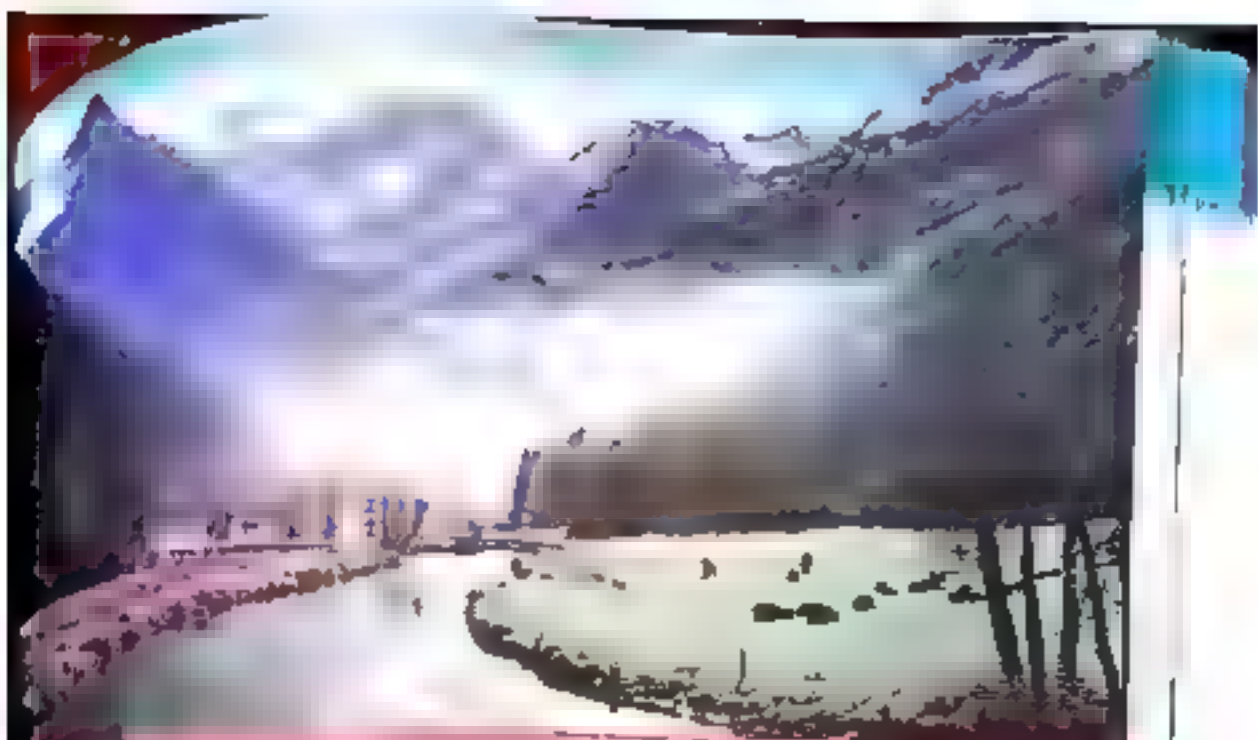
$\left[\frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

فأوجد قيمة كل من $\sin 2$ ، $\cos 2$ ، $\tan 2$

١٨) إذا كان $\sin 2 = \frac{1}{2}$ فإن $\cos 2 = \dots\dots\dots$ حيث $0 < 2 < 90$

$\left[\frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

فأوجد قيمة كل من $\sin 2$ ، $\cos 2$ ، $\tan 2$



صيفه هيرون

السرير

٤

٥) إيجاد مساحة سطح الخشب من أهمية أطوال أضلاع

بفرض أن a, b, c هي أطوال أضلاع المثلث ABC حيث:

$a = b + c$ (حيث c نصف محيط المثلث)

من قاعدة ديل التمام نعلم أن $\sin A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$

ومن متطابقة فيثاغورث، $a^2 = b^2 + c^2$

لاحظ أن: $\sin A > 0$ ، $\sin A < 1$ فيكون $0 < \sin A < 1$

بالتعويض من ١، ٢ فيكون:

$$\sin A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{2bc}{2bc} = 1$$

لما وجدنا

$$\sin A = 1 \Rightarrow A = 90^\circ$$

(الحاصل في ABC مثلث قائم الزاوية)

$$\sin A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{2bc}{2bc} = 1$$

(وضح المقدار في صورة هيرون)

٣١١

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{b} = \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{b}{b} + \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{c}{b} \end{aligned}$$

ولكن $\frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c}$ هي (4) :
بالتعويض من (3) هي (4) :

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c}$$

أو أن مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه هي a, b, c هي

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

ملحظة هامة: البرهان لا يمكن فيه الطرب

النتيجة

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث ونمس جميع أضلاعه

سنطبق أن نستنتج أن

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c} \\ \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a+b+c} \end{aligned}$$



$$S = \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) \cdot r$$

أشكال ثنائية

١ إذا كانت إحدى القيم a - b أو c - a أو c - b سالبة فإن الكميات السالبة تحت الجذر غير معرفة في c وبالتالي لا توجد مساحة للمثلث وإذا كانت إحدى القيم تساوي صفرًا فإنه لا يوجد مثلث من الأساس.

٢ إذا كانت $c >$ أحد أطوال أضلاع المثلث فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته ويمكن استخدام متباينة المثلث للتأكد من ذلك قبل الحل حيث مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

فمثلًا، إذا كانت أطوال الأضلاع هي ١٥، ٧، ٩ من السنتيمترات فليكن:

$a = 15$ ، $b = 7$ ، $c = 9$ ويكون $c <$ طول أحد الأضلاع فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته وبالمثل إذا استخدمنا متباينة المثلث نجد هنا أن $15 = 7 + 9$ أي أن مجموع طولي ضلعين أصغر من طول الضلع الثالث وبالتالي فإن هذه الأطوال لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ولذلك لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته.

مثال

أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح ΔABC الذي فيه:
 $a = 13$ ، $b = 12$ ، $c = 5$

الحل

$$s = \frac{13 + 12 + 5}{2} = 15$$

$$s = 15$$

$$a - s = 13 - 15 = -2$$

$$b - s = 12 - 15 = -3$$

$$c - s = 5 - 15 = -10$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta = \frac{1}{4} (a-s)(b-s)(c-s)$$

$$= \frac{1}{4} (2 \times 3 \times 10) = 15$$



مثال ٢

أوجد مساحة المثلثات الآتية (إن أمكن ذلك)

- ١ مثلث أطوال أضلاعه ٩، ٩، ٩ من السنتيمترات
- ٢ مثلث أطوال أضلاعه ٩، ٩، ٩ من السنتيمترات

الحل

- ١ بفرض أن $a = 9$ ، $b = 9$ ، $c = 9$
 $\therefore \angle 1 = 11$
 $\angle 2 = 9 + 9 + 9 = 27$
 $\angle 3 = 9 - 11 = -2$ ، $\angle 4 = 9 - 11 = -2$ ، $\angle 5 = 9 - 11 = -2$
 \therefore مساحة $\Delta = \frac{1}{2} (a-b)(b-c)(c-a) = \frac{1}{2} (9-9)(9-9)(9-9) = 0$
 \therefore لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته
- ٢ بفرض أن $a = 9$ ، $b = 9$ ، $c = 9$
 $\therefore \angle 1 = 11$ ، $\angle 2 = 18$ ، $\angle 3 = 58$
 $\therefore \angle 4 = 11$ ، $\angle 5 = 18$ ، $\angle 6 = 58$
 \therefore لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته

مثال ٣

الشكل المقابل ،

يبيّن قطعة أرض أبعادها
 كما هو موضح بالشكل
 أوجد مساحته لأقرب ٢

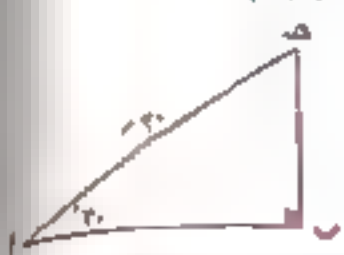


الحل

- Δ و Δ متساوي الأضلاع
 $\therefore \angle 1 = 30$ ، $\angle 2 = 30$ ، $\angle 3 = 30$
 $\angle 4 = 40$ ، $\angle 5 = 30 \times 2 = 60$ ، $\angle 6 = 50$
 $\angle 7 = 30 - 40 = -10$ ، $\angle 8 = 30 - 50 = -20$ ، $\angle 9 = 30 - 60 = -30$

$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ ا هـ د} = \frac{1}{2} (1-2)(2-2)(2-2) = 0$$

$$\therefore 390 = \sqrt{125} = 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$$



$\triangle \text{ ا ب د} :$

$$\text{ب د} = 10, \text{ا د} = 10$$

$$\text{ا ب} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

مساحة $\triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طول ضلعيه} \times \sin \text{الزاوية المحصورة بينهما}$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 90^\circ = 50$$

$$190 = \sqrt{112.5} = 10.6 \times 10.6 \times 10.6 \times 10.6 =$$

\therefore مساحة الشكل ا ب د هـ = مساحة $\triangle \text{ ا ب د} +$ مساحة $\triangle \text{ ا ب هـ}$

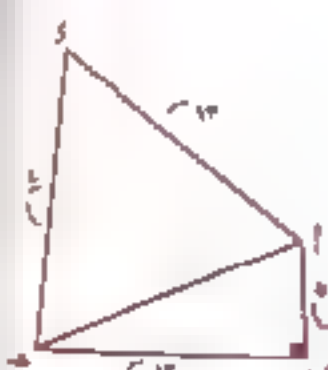
$$380 = 190 + 190 =$$

مثال

أوجد مساحة الشكل الرباعي ا ب د هـ الذي فيه $\angle \text{ب د هـ} = 90^\circ$ و $\angle \text{ا ب د} = 135^\circ$

$$\text{ب د} = 12, \text{ا د} = 5, \text{ا ب} = 13$$

الحل



في $\triangle \text{ ا ب د} :$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times \text{ب د} \times \text{ا د} \times \sin \angle \text{ا ب د}$$

$$30 = 12 \times 5 \times \sin \angle \text{ا ب د}$$

$$\therefore \sin \angle \text{ا ب د} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle \text{ا ب د} = 30^\circ$$

في $\triangle \text{ ا ب د} :$

$$39 = 12 + 12 + 12 = 36$$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} (13-12)(12-12)(12-12) = 0$$

\therefore مساحة الشكل الرباعي ا ب د هـ =

$$390 = 390 + 30 = 420 = \text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} + \text{مساحة } \triangle \text{ ا ب هـ}$$

مثال

إذا كان محيط Δ ABC = 300 متر والنسبة بين أطوال أضلاعه
 $a:b:c = 3:5:7$ أوجد مساحة Δ ABC .

الحل

نفرض أن $a=3$ ، $b=5$ ، $c=7$

\therefore محيط Δ $ABC = a+b+c$

$$300 = 3 + 5 + 7$$

$$20 = a$$

$$30 = b$$

$$\therefore a=3 \times 20 = 60$$

$$b=5 \times 20 = 100$$

$$c=7 \times 20 = 140$$

$$\therefore s = 150$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{60+100+140}{2}$$

$$s-a = 150-60 = 90, s-b = 150-100 = 50, s-c = 150-140 = 10$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} = 2250$$

مثال

أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تلمس أضلاع Δ ABC الذي أطوال أضلاعه
 $14, 9, 7$ من المستقيمات من الداخل مقررًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

الحل

نفرض أن $a=7$ ، $b=9$ ، $c=14$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+9+14}{2}$$

$$s-a = 14-7 = 7, s-b = 9-9 = 0, s-c = 14-14 = 0$$

$$\therefore r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{14 \times 7 \times 0 \times 0}}{14} = 0$$

الأسئلة والأسئلة
الأسئلة والأسئلة
الأسئلة والأسئلة
الأسئلة والأسئلة

الأسئلة والأسئلة

الأسئلة والأسئلة

الأسئلة والأسئلة



الأسئلة والأسئلة

الأسئلة والأسئلة

① إذا كان $\theta = 2$ فإن $\theta = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $\dots\dots\dots$
[-1 ، 1 ، صفر ، 1 ، 2]

② إذا كان $\theta = 1$ فإن $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$ $\dots\dots\dots$
[0.5 ، 1 ، 1.5 ، 2 ، 2.5]

③ إذا كان $\theta = 1$ فإن $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$ $\dots\dots\dots$
[0.5 ، 1 ، 1.5 ، 2 ، 2.5]

④ إذا كان $\theta = 1$ فإن $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$ $\dots\dots\dots$
[0.5 ، 1 ، 1.5 ، 2 ، 2.5]

⑤ إذا كان $\theta = 1$ حيث $\frac{\theta}{1 + \theta} > 1$ $\dots\dots\dots$
قيمة: $\theta = 1$ ، $\theta = 2$ ، $\theta = 3$ ، $\theta = 4$ ، $\theta = 5$

⑥ بدون استخدام الحاسبة أثبت أن

(أ) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4} = 0.75$ (ب) $\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 0.5$



⑤ في الشكل المقابل.

مساحة سطح \triangle ا ب هـ

تساوي

[٣٠] ا ٦٠ ب ١٢٠ ج ١٤٠ د ١٦٠

⑥ إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ وطول أحد أضلاعه ٢٦ فإن طول ضلعين الآخرين باء يمكن أن يكونا

[٣٠، ٤] ا ٣٠، ٣٩ ب ٤٠، ٤٠ ج ٤٠، ٤٠ د ٣٩، ٤٢

مسائل المستوى الثاني

① أوجد مساحة مثلث ا ب هـ الذي فيه

[٣٥]

① ا = ٦، ب = ٨، هـ = ١٠

[٣٤، ٨]

② ا = ٨، ب = ١١، هـ = ١٣

[٣٧، ٨]

③ ا = ١٢، ب = ١٧، هـ = ١٣

[٣٩]

④ ا = ٢٠، ب = ١٢، هـ = ١٦

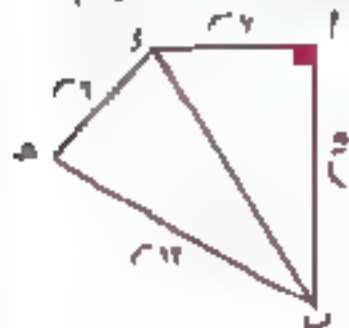
[٣٨، ٨]

⑤ ا = ١٠، ب = ٢٤، هـ = ٢٢

[٣٨]

⑥ ا = ١٥، ب = ١٢، هـ = ٩

② أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية مستخدماً البيانات المبينة على الرسم:



②



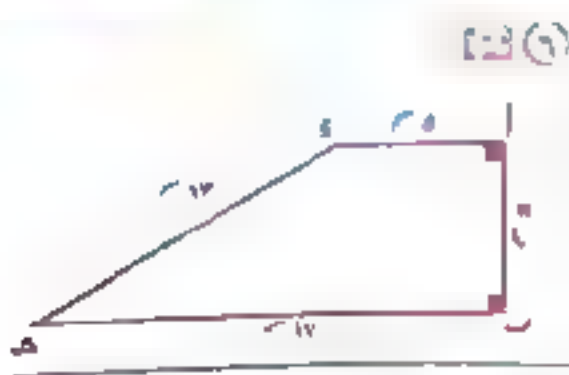
①



④



③



١) أوجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ الذي فيه $AB = 10$ ، $BC = 8$ ، $CD = 14$ ، $DA = 16$ ، $\angle B = 90^\circ$ [٢٠٢٠]

٢) أوجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ الذي فيه $\angle B = 90^\circ$ ، $AB = 10$ ، $BC = 8$ ، $CD = 14$ ، $DA = 16$ [٢٠٢٠]

٣) أوجد مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ الذي فيه $\angle B = 90^\circ$ ، $AB = 10$ ، $BC = 8$ ، $CD = 14$ ، $DA = 16$ [٢٠٢٠]

٤) AB مثلث متساوي الساقين محيطه 30 وطول ضلع قاعدته تساوي 8 أوجد مساحة سطح $\triangle ABC$ [٢٠٢٠]

٥) حذيفة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هي $3:5:7$ فإذا كان محيط الحذيفة يساوي 30 متر فأوجد مساحته [٢٠٢٠]

التمرين الثاني: تقيس مسنوعات عليا من التفكير

١) AB مثلث متساوي الساقين محيطه 32 ، $\angle B = 90^\circ$ ، $AB = 10$ ، $BC = 8$ ، $CD = 14$ ، $DA = 16$ النسبة بين أطوال أضلاعه $AB:BC:CD:DA = 1:2:4:8$ أوجد مساحته [٢٠٢٠]

الماهر

فى

الرياضيات البحتة

للفيف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

حلول الكتاب

تابعنا تيليجرام

إعراؤ

<https://t.me/miri33andyou1>

ماهر أحمد محمود

يطلب من : دار الكوثر للنشر والتوزيع بالقجالة

الطبعة الفنى ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠٢ - ٠١١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠٠١٥٠٨٠٠٥ من ب ١٣ الدواوين - القاهرة

www.ELMAHER.org

أو على موقعنا

$$1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = (1 + \frac{1}{r}) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{3}$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{4} \quad (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{5}$$

$$1 - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{6} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{7}$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{8} \quad (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{9} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{10}$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{11} \quad \left(\frac{1}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{12} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \textcircled{13}$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{14}$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} - (1+r) \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{15}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{16}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{17}$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} - (1+r) \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{18}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$(1+r) \cdot \frac{1}{1} - (1+r) \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{19}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{20}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = (1+r) \cdot \frac{1}{1} \textcircled{21}$$

هذا المقادير موجب عند r عدد حقيقي وسالب عند r عدد زائدي

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{22}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{23}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{24}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{25}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{26}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{27}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{28}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{29}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{30}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{31}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{32}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{33}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{34}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{35}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{36}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{37}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{38}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{39}$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1 \textcircled{40}$$

$$y = \dots \quad (2 + r) = \dots \quad (r = 1) \quad (21)$$

$$\frac{y}{r} = \dots \quad \frac{2+r}{r} = \dots$$

$$1A = (r^2 - r) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$1A = 2 \times 2 - r \times 2 + 1 \times 2 - r \times 2$$

$$1A = (r^2 - r) \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad 1A = 2 - r \times 2 + r \times 2$$

$$1A = r \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad A = \frac{2+r}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad A = r \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 - n) \dots \quad (22)$$

$$2 \text{ حنا} - 3 \text{ حنا} + 2 \text{ حنا} - 2 \text{ حنا} + 1 \text{ حنا} - 1 \text{ حنا} =$$

$$9 \text{ حنا} - 9 \text{ حنا} + \dots + 8 \text{ حنا} - 8 \text{ حنا} +$$

$$\dots + (88 \text{ حنا} - 2 \text{ حنا}) + (89 \text{ حنا} - 1 \text{ حنا}) =$$

$$1 = (1 -) + \dots + 1 = (90 \text{ حنا} - 90 \text{ حنا}) +$$

$$= \text{على المتكافئة الحسابية} \quad (23)$$

$$1 \quad (1) \quad (24) \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39 \quad 40 \quad 41 \quad 42 \quad 43 \quad 44 \quad 45 \quad 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50 \quad 51 \quad 52 \quad 53 \quad 54 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 58 \quad 59 \quad 60 \quad 61 \quad 62 \quad 63 \quad 64 \quad 65 \quad 66 \quad 67 \quad 68 \quad 69 \quad 70 \quad 71 \quad 72 \quad 73 \quad 74 \quad 75 \quad 76 \quad 77 \quad 78 \quad 79 \quad 80 \quad 81 \quad 82 \quad 83 \quad 84 \quad 85 \quad 86 \quad 87 \quad 88 \quad 89 \quad 90 \quad 91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95 \quad 96 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 100$$

$$(1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$1 = 2 - 1 \times 2 = 1 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 1$$

$$1 = 2 - 2 \times 2 = 0 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 2$$

$$2 = 2 - 3 \times 2 = -4 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 3$$

$$3 = 2 - 4 \times 2 = -6 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 4$$

$$4 = 2 - 5 \times 2 = -8 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 5$$

$$5 = 2 - 6 \times 2 = -10 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 6$$

$$13 + 11 + 7 + 3 + 1 = (1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$1 = 1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 1 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 1$$

$$\frac{1}{r} = 1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 1 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 2$$

$$\frac{1}{2} = 1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 1 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 3$$

$$\frac{1}{3} = 1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 1 \text{ حنا} \quad \text{بوضع } r = 4$$

$$\dots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 1 = 1 - r^2 \left(\frac{1}{r} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$11 \text{ حنا} + 11 \text{ حنا} + 11 \text{ حنا} + 11 \text{ حنا} =$$

$$11 \text{ حنا} = (1 - 1 + 1) \text{ حنا} = 11 \text{ حنا} + 11 \text{ حنا} + 11 \text{ حنا} =$$

$$11 \text{ حنا} = 11 \text{ حنا} \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$(1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad (25)$$

$$1 - r^2 = 0 \quad r = 1$$

$$1 - r^2 = 0 \quad r = 2$$

$$1 - r^2 = 0 \quad r = 3$$

$$11 - 11 = 0 \quad r = 1$$

$$11 - 11 = 0 \quad r = 2$$

$$(11 - 11) = 0 \quad r = 3$$

$$1 = 1 - 11 = (1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \dots = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad (26)$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad r = 2$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad r = 3$$

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad r = 4$$

$$11 - 11 = 0 \quad r = 1$$

$$11 - 11 = 0 \quad r = 2$$

$$(11 - 11) = 0 \quad r = 3$$

$$\frac{11}{11} = \frac{1}{11} - 1 = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$11 = 1(2) + 1(2) + 1(1) = 1 \sum_{n=0}^{\infty} \dots = (2) \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad (27)$$

$$11 = \frac{(1+11) \times 11}{r} = 11 \sum_{n=0}^{\infty} \dots = (11) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$11 = (11) \sum_{n=0}^{\infty} \dots = (11) \sum_{n=0}^{\infty} \dots = (11) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$\frac{1}{r} = (r) \sum_{n=0}^{\infty} \dots \quad (28)$$

$$\left(\frac{1}{r} + r \right) \sum_{n=0}^{\infty} \dots = (r) \sum_{n=0}^{\infty} \dots$$

$$\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \dots + r \sum_{n=0}^{\infty} \dots =$$

$$11 = 1 + 11 = 12 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} =$$

المسوحة ضوئيا بـ CamScanner

١٠٩٤٥٦٧٨٩

$$A = 1 + 7 = 8 \quad B = 1 \quad C = 1 \quad D = 1 \quad E = 1 \quad F = 1 \quad G = 1 \quad H = 1 \quad I = 1 \quad J = 1 \quad K = 1 \quad L = 1 \quad M = 1 \quad N = 1 \quad O = 1 \quad P = 1 \quad Q = 1 \quad R = 1 \quad S = 1 \quad T = 1 \quad U = 1 \quad V = 1 \quad W = 1 \quad X = 1 \quad Y = 1 \quad Z = 1$$

[illegible]

$$\frac{q}{r^2} = \frac{1-u}{1-u^2} \therefore \quad \frac{r}{r_0} = \frac{1-u}{1-u^2}$$

Sublime Septuag⁺

$$\lambda = 190 + \lambda \quad \text{or} \quad \lambda = 112 \quad (7)$$

$$T = \frac{1}{\omega} \quad \text{and} \quad \omega = \frac{1}{T} \quad \text{[7]}$$

بالتمريض في المملكة الأولى
١٥ = ١٥
٢ = ٢
٣ = ٣
٤ = ٤
٥ = ٥
٦ = ٦
٧ = ٧
٨ = ٨
٩ = ٩
١٠ = ١٠
١١ = ١١
١٢ = ١٢
١٣ = ١٣
١٤ = ١٤
١٥ = ١٥
١٦ = ١٦
١٧ = ١٧
١٨ = ١٨
١٩ = ١٩
٢٠ = ٢٠
٢١ = ٢١
٢٢ = ٢٢
٢٣ = ٢٣
٢٤ = ٢٤
٢٥ = ٢٥
٢٦ = ٢٦
٢٧ = ٢٧
٢٨ = ٢٨
٢٩ = ٢٩
٣٠ = ٣٠
٣١ = ٣١
٣٢ = ٣٢
٣٣ = ٣٣
٣٤ = ٣٤
٣٥ = ٣٥
٣٦ = ٣٦
٣٧ = ٣٧
٣٨ = ٣٨
٣٩ = ٣٩
٤٠ = ٤٠
٤١ = ٤١
٤٢ = ٤٢
٤٣ = ٤٣
٤٤ = ٤٤
٤٥ = ٤٥
٤٦ = ٤٦
٤٧ = ٤٧
٤٨ = ٤٨
٤٩ = ٤٩
٥٠ = ٥٠
٥١ = ٥١
٥٢ = ٥٢
٥٣ = ٥٣
٥٤ = ٥٤
٥٥ = ٥٥
٥٦ = ٥٦
٥٧ = ٥٧
٥٨ = ٥٨
٥٩ = ٥٩
٦٠ = ٦٠
٦١ = ٦١
٦٢ = ٦٢
٦٣ = ٦٣
٦٤ = ٦٤
٦٥ = ٦٥
٦٦ = ٦٦
٦٧ = ٦٧
٦٨ = ٦٨
٦٩ = ٦٩
٧٠ = ٧٠
٧١ = ٧١
٧٢ = ٧٢
٧٣ = ٧٣
٧٤ = ٧٤
٧٥ = ٧٥
٧٦ = ٧٦
٧٧ = ٧٧
٧٨ = ٧٨
٧٩ = ٧٩
٨٠ = ٨٠
٨١ = ٨١
٨٢ = ٨٢
٨٣ = ٨٣
٨٤ = ٨٤
٨٥ = ٨٥
٨٦ = ٨٦
٨٧ = ٨٧
٨٨ = ٨٨
٨٩ = ٨٩
٩٠ = ٩٠
٩١ = ٩١
٩٢ = ٩٢
٩٣ = ٩٣
٩٤ = ٩٤
٩٥ = ٩٥
٩٦ = ٩٦
٩٧ = ٩٧
٩٨ = ٩٨
٩٩ = ٩٩
١٠٠ = ١٠٠
١٠١ = ١٠١
١٠٢ = ١٠٢
١٠٣ = ١٠٣
١٠٤ = ١٠٤
١٠٥ = ١٠٥
١٠٦ = ١٠٦
١٠٧ = ١٠٧
١٠٨ = ١٠٨
١٠٩ = ١٠٩
١١٠ = ١١٠
١١١ = ١١١
١١٢ = ١١٢
١١٣ = ١١٣
١١٤ = ١١٤
١١٥ = ١١٥
١١٦ = ١١٦
١١٧ = ١١٧
١١٨ = ١١٨
١١٩ = ١١٩
١٢٠ = ١٢٠
١٢١ = ١٢١
١٢٢ = ١٢٢
١٢٣ = ١٢٣
١٢٤ = ١٢٤
١٢٥ = ١٢٥
١٢٦ = ١٢٦
١٢٧ = ١٢٧
١٢٨ = ١٢٨
١٢٩ = ١٢٩
١٣٠ = ١٣٠
١٣١ = ١٣١
١٣٢ = ١٣٢
١٣٣ = ١٣٣
١٣٤ = ١٣٤
١٣٥ = ١٣٥
١٣٦ = ١٣٦
١٣٧ = ١٣٧
١٣٨ = ١٣٨
١٣٩ = ١٣٩
١٤٠ = ١٤٠
١٤١ = ١٤١
١٤٢ = ١٤٢
١٤٣ = ١٤٣
١٤٤ = ١٤٤
١٤٥ = ١٤٥
١٤٦ = ١٤٦
١٤٧ = ١٤٧
١٤٨ = ١٤٨
١٤٩ = ١٤٩
١٥٠ = ١٥٠
١٥١ = ١٥١
١٥٢ = ١٥٢
١٥٣ = ١٥٣
١٥٤ = ١٥٤
١٥٥ = ١٥٥
١٥٦ = ١٥٦
١٥٧ = ١٥٧
١٥٨ = ١٥٨
١٥٩ = ١٥٩
١٦٠ = ١٦٠
١٦١ = ١٦١
١٦٢ = ١٦٢
١٦٣ = ١٦٣
١٦٤ = ١٦٤
١٦٥ = ١٦٥
١٦٦ = ١٦٦
١٦٧ = ١٦٧
١٦٨ = ١٦٨
١٦٩ = ١٦٩
١٧٠ = ١٧٠
١٧١ = ١٧١
١٧٢ = ١٧٢
١٧٣ = ١٧٣
١٧٤ = ١٧٤
١٧٥ = ١٧٥
١٧٦ = ١٧٦
١٧٧ = ١٧٧
١٧٨ = ١٧٨
١٧٩ = ١٧٩
١٨٠ = ١٨٠
١٨١ = ١٨١
١٨٢ = ١٨٢
١٨٣ = ١٨٣
١٨٤ = ١٨٤
١٨٥ = ١٨٥
١٨٦ = ١٨٦
١٨٧ = ١٨٧
١٨٨ = ١٨٨
١٨٩ = ١٨٩
١٩٠ = ١٩٠
١٩١ = ١٩١
١٩٢ = ١٩٢
١٩٣ = ١٩٣
١٩٤ = ١٩٤
١٩٥ = ١٩٥
١٩٦ = ١٩٦
١٩٧ = ١٩٧
١٩٨ = ١٩٨
١٩٩ = ١٩٩
٢٠٠ = ٢٠٠
٢٠١ = ٢٠١
٢٠٢ = ٢٠٢
٢٠٣ = ٢٠٣
٢٠٤ = ٢٠٤
٢٠٥ = ٢٠٥
٢٠٦ = ٢٠٦
٢٠٧ = ٢٠٧
٢٠٨ = ٢٠٨
٢٠٩ = ٢٠٩
٢١٠ = ٢١٠
٢١١ = ٢١١
٢١٢ = ٢١٢
٢١٣ = ٢١٣
٢١٤ = ٢١٤
٢١٥ = ٢١٥
٢١٦ = ٢١٦
٢١٧ = ٢١٧
٢١٨ = ٢١٨
٢١٩ = ٢١٩
٢٢٠ = ٢٢٠
٢٢١ = ٢٢١
٢٢٢ = ٢٢٢
٢٢٣ = ٢٢٣
٢٢٤ = ٢٢٤
٢٢٥ = ٢٢٥
٢٢٦ = ٢٢٦
٢٢٧ = ٢٢٧
٢٢٨ = ٢٢٨
٢٢٩ = ٢٢٩
٢٣٠ = ٢٣٠
٢٣١ = ٢٣١
٢٣٢ = ٢٣٢
٢٣٣ = ٢٣٣
٢٣٤ = ٢٣٤
٢٣٥ = ٢٣٥
٢٣٦ = ٢٣٦
٢٣٧ = ٢٣٧
٢٣٨ = ٢٣٨
٢٣٩ = ٢٣٩
٢٤٠ = ٢٤٠
٢٤١ = ٢٤١
٢٤٢ = ٢٤٢
٢٤٣ = ٢٤٣
٢٤٤ = ٢٤٤
٢٤٥ = ٢٤٥
٢٤٦ = ٢٤٦
٢٤٧ = ٢٤٧
٢٤٨ = ٢٤٨
٢٤٩ = ٢٤٩
٢٥٠ = ٢٥٠
٢٥١ = ٢٥١
٢٥٢ = ٢٥٢
٢٥٣ = ٢٥٣
٢٥٤ = ٢٥٤
٢٥٥ = ٢٥٥
٢٥٦ = ٢٥٦
٢٥٧ = ٢٥٧
٢٥٨ = ٢٥٨
٢٥٩ = ٢٥٩
٢٦٠ = ٢٦٠
٢٦١ = ٢٦١
٢٦٢ = ٢٦٢
٢٦٣ = ٢٦٣
٢٦٤ = ٢٦٤
٢٦٥ = ٢٦٥
٢٦٦ = ٢٦٦
٢٦٧ = ٢٦٧
٢٦٨ = ٢٦٨
٢٦٩ = ٢٦٩
٢٧٠ = ٢٧٠
٢٧١ = ٢٧١
٢٧٢ = ٢٧٢
٢٧٣ = ٢٧٣
٢٧٤ = ٢٧٤
٢٧٥ = ٢٧٥
٢٧٦ = ٢٧٦
٢٧٧ = ٢٧٧
٢٧٨ = ٢٧٨
٢٧٩ = ٢٧٩
٢٨٠ = ٢٨٠
٢٨١ = ٢٨١
٢٨٢ = ٢٨٢
٢

$$(1) \rightarrow Y = f(x) + f(x) \quad Y = \sqrt{2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{IV} &= (jY + i) + (j + i) \therefore & \text{IV} &= j^2 + j^2 \quad \boxed{\text{IV}} \\ (1) \Rightarrow \text{VI} &= jY + i \therefore & \text{IV} &= j^2 + i^2 \\ & & \text{VI} &= j^2 \times j^2 \end{aligned}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \psi) + \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \psi) = \frac{1}{2}(\bar{\psi} + \psi) - \frac{1}{2}(\bar{\psi} - \psi) \quad (7)$$

[illegible]

عدد الأعداد المحصورة بين ١٢١٢ وكل منها لا يقبل على ٣
 عدد الأعداد = ٣١ = ٩٩ - ٢٨ =

$$\begin{matrix} ١٨ \textcircled{2} & ٣٩ \textcircled{7} & ٦٧ \textcircled{1} \\ ٣٦ \textcircled{5} & ٦٥ \textcircled{8} & ٩٢ \textcircled{4} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} ٧ &= ٢٢ & ٤ &= ٢٢ \\ ١ &= ٣ + ٧ = ١٠ & - & ٧ = ١٠ + ١ \\ ٩ &= ١٠ & ١ &= ١٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١١ &= ١ + ٨ = ٩ \\ ١٢ &= ١ + ١١ = ١٢ \\ ١٣ &= ١ + ١٢ = ١٣ \\ ١٤ &= ١ + ١٣ = ١٤ \\ ١٥ &= ١ + ١٤ = ١٥ \\ ١٦ &= ١ + ١٥ = ١٦ \\ ١٧ &= ١ + ١٦ = ١٧ \\ ١٨ &= ١ + ١٧ = ١٨ \\ ١٩ &= ١ + ١٨ = ١٩ \\ ٢٠ &= ١ + ١٩ = ٢٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١١ &= ١ + ١٠ = ١١ \\ ١٢ &= ١ + ١١ = ١٢ \\ ١٣ &= ١ + ١٢ = ١٣ \\ ١٤ &= ١ + ١٣ = ١٤ \\ ١٥ &= ١ + ١٤ = ١٥ \\ ١٦ &= ١ + ١٥ = ١٦ \\ ١٧ &= ١ + ١٦ = ١٧ \\ ١٨ &= ١ + ١٧ = ١٨ \\ ١٩ &= ١ + ١٨ = ١٩ \\ ٢٠ &= ١ + ١٩ = ٢٠ \end{aligned}$$

$$١١ - ١٠ = ١ \quad ١٢ - ١١ = ١ \quad ١٣ - ١٢ = ١ \quad ١٤ - ١٣ = ١ \quad ١٥ - ١٤ = ١ \quad ١٦ - ١٥ = ١ \quad ١٧ - ١٦ = ١ \quad ١٨ - ١٧ = ١ \quad ١٩ - ١٨ = ١ \quad ٢٠ - ١٩ = ١$$

$$\begin{aligned} (١ + ١٠) - (١ + ١١) &= (١ + ١٢) - (١ + ١٣) \\ ١ &= ١ \quad ١٠ = ١١ \quad ١٢ = ١٣ \end{aligned}$$

$$١٠ + ٢٠ = ٣٠ \quad ٢٠ = ٣٠$$

$$٢٠ > ١٠ \quad ٣٠ > ٢٠$$

$$٢ \frac{١}{٢} > ١ \quad ٣ \frac{١}{٢} > ٢$$

$$١ = ١ \quad ١٠ = ١٠$$

$$١ = ١ \quad ١٠ = ١٠$$

$$١٨ + ٥١ = ٦٩ \quad ٦٩ = ٦٩$$

$$٥١ < ٦٩ \quad ٦٩ < ٦٩$$

$$٢ = ٢ \quad ٢ \frac{١}{٢} < ٢$$

$$٢ + ٢ = ٤ \quad ٤ = ٤$$

$$١(١ + ١) = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$١٠ + ١٠ = ٢٠ \quad ٢٠ = ٢٠$$

$$١٠ = ١٠ \quad ١٠ = ١٠$$

$$١(١ + ١) = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$١(١ + ١) = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$١(١ + ١) = ٢ \quad ٢ = ٢$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \quad \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$١ = ١ \quad ١ = ١$$

$$\begin{aligned} ١١ &= ١ \quad ١ = ١ \\ ١١ &= ١ \quad ١ = ١ \end{aligned}$$

$$١٨ = ١٨ - ١٨$$

$$١ = ١ \quad ١٨ = ١٨ - ١ \quad ١٨ = ١٨ - ١ = ١٨ + ١$$

$$٣١ = (١٩ + ١) - (١٩ + ١) \quad ٣١ = ٣١ - ٣١$$

$$١ = ١ \quad ٣١ = ٣١ - ١ = ٣١ = ٣١ - ١ = ٣١ + ١$$

$$١ = ١ \quad ٣١ = ٣١ - ١ = ٣١ = ٣١ - ١ = ٣١ + ١$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

$$١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢ \quad ١١ + ١١ = ٢٢$$

من $x = y = z = 1$ من متساويين ثابت

من $(x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 4$ تكون متساوية حسابية

(38) نفرض أن المتساوية الأولى $1 + 1 + 1 + 1 = 4$...

والمتساوية الثانية $1 + 1 + 1 + 1 = 4$...

$$(1) \quad 1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 = 2 + 1$$

$$(2) \quad 1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$(3) \quad 1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

ع (من المتساوية الأولى) $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ بالتمويض من (1) هي (3)

ع (من المتساوية الثانية) $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ع (من المتساوية الثانية)

$$(1) \quad 1 + 1 = 2 \quad 1 + 1 = 2 + 1$$

$$1 + 1 = 2 \quad 1 + 1 = 2 + 1$$

بالتمويض من (1) $1 + 1 = 2$ $1 + 1 = 2 + 1$

$$(2) \quad 1 + 1 + 1 = 3 + 1 \quad 1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1 \quad 1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 3 + 1$$

المتساوية هي $(1 + 1 + 1 + 1 = 4)$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

(39) نفرض أن المتساوية هي $1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

ع (من المتساوية الأولى) $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ ع (من المتساوية الأولى)

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

(40) نفرض أن المتساوية هي $1 + 1 + 1 + 1 = 4$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(1 + 1 + 1 + 1) = 4$$

$$(1 + 1 + 1 + 1) = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

المتساوية هي $(1 + 1 + 1 + 1 = 4)$ ع (من المتساوية الأولى)

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$١٢) \quad ٢٤ = \frac{١٢+٢٤}{٢} \quad ٢٤ = \frac{١٢+٢٤}{٢}$$

$$١٨ = ١٢ \quad ٢٨ = ١٢ + ٢٠ \quad ٢٨ = \frac{١٢+٢٠}{٢}$$

$$١٩) \quad ١٩ = ١٢ + ٢٦ \quad ١٩ = \frac{١٢+٢٦}{٢}$$

$$٢٠) \quad ٢٠ = ١٢ + ٢٨ \quad ٢٠ = \frac{١٢+٢٨}{٢}$$

$$٢١) \quad ٢١ = ١٢ + ٣٠ \quad ٢١ = \frac{١٢+٣٠}{٢}$$

$$٢٢) \quad ٢٢ = ١٢ + ٣٢ \quad ٢٢ = \frac{١٢+٣٢}{٢}$$

$$٢٣) \quad ٢٣ = ١٢ + ٣٤ \quad ٢٣ = \frac{١٢+٣٤}{٢}$$

$$٢٤) \quad ٢٤ = ١٢ + ٣٦ \quad ٢٤ = \frac{١٢+٣٦}{٢}$$

$$٢٥) \quad ٢٥ = ١٢ + ٣٨ \quad ٢٥ = \frac{١٢+٣٨}{٢}$$

$$٢٦) \quad ٢٦ = ١٢ + ٤٠ \quad ٢٦ = \frac{١٢+٤٠}{٢}$$

$$٢٧) \quad ٢٧ = ١٢ + ٤٢ \quad ٢٧ = \frac{١٢+٤٢}{٢}$$

$$٢٨) \quad ٢٨ = ١٢ + ٤٤ \quad ٢٨ = \frac{١٢+٤٤}{٢}$$

$$٢٩) \quad ٢٩ = ١٢ + ٤٦ \quad ٢٩ = \frac{١٢+٤٦}{٢}$$

$$٣٠) \quad ٣٠ = ١٢ + ٤٨ \quad ٣٠ = \frac{١٢+٤٨}{٢}$$

$$٣١) \quad ٣١ = ١٢ + ٥٠ \quad ٣١ = \frac{١٢+٥٠}{٢}$$

$$٣٢) \quad ٣٢ = ١٢ + ٥٢ \quad ٣٢ = \frac{١٢+٥٢}{٢}$$

$$٣٣) \quad ٣٣ = ١٢ + ٥٤ \quad ٣٣ = \frac{١٢+٥٤}{٢}$$

$$٣٤) \quad ٣٤ = ١٢ + ٥٦ \quad ٣٤ = \frac{١٢+٥٦}{٢}$$

$$٣٥) \quad ٣٥ = ١٢ + ٥٨ \quad ٣٥ = \frac{١٢+٥٨}{٢}$$

$$٣٦) \quad ٣٦ = ١٢ + ٦٠ \quad ٣٦ = \frac{١٢+٦٠}{٢}$$

$$٣٧) \quad ٣٧ = ١٢ + ٦٢ \quad ٣٧ = \frac{١٢+٦٢}{٢}$$

$$٣٨) \quad ٣٨ = ١٢ + ٦٤ \quad ٣٨ = \frac{١٢+٦٤}{٢}$$

$$٣٩) \quad ٣٩ = ١٢ + ٦٦ \quad ٣٩ = \frac{١٢+٦٦}{٢}$$

$$٤٠) \quad ٤٠ = ١٢ + ٦٨ \quad ٤٠ = \frac{١٢+٦٨}{٢}$$

$$٤١) \quad ٤١ = ١٢ + ٦٩ \quad ٤١ = \frac{١٢+٦٩}{٢}$$

$$٤٢) \quad ٤٢ = ١٢ + ٧٠ \quad ٤٢ = \frac{١٢+٧٠}{٢}$$

$$٤٣) \quad ٤٣ = ١٢ + ٧١ \quad ٤٣ = \frac{١٢+٧١}{٢}$$

$$٤٤) \quad ٤٤ = ١٢ + ٧٢ \quad ٤٤ = \frac{١٢+٧٢}{٢}$$

$$٤٥) \quad ٤٥ = ١٢ + ٧٣ \quad ٤٥ = \frac{١٢+٧٣}{٢}$$

$$٤٦) \quad ٤٦ = ١٢ + ٧٤ \quad ٤٦ = \frac{١٢+٧٤}{٢}$$

$$٤٧) \quad ٤٧ = ١٢ + ٧٥ \quad ٤٧ = \frac{١٢+٧٥}{٢}$$

$$١٣) \quad ١٣ = ١٢ + ١٤ \quad ١٣ = \frac{١٢+١٤}{٢}$$

$$١٤) \quad ١٤ = ١٢ + ١٦ \quad ١٤ = \frac{١٢+١٦}{٢}$$

$$١٥) \quad ١٥ = ١٢ + ١٨ \quad ١٥ = \frac{١٢+١٨}{٢}$$

$$١٦) \quad ١٦ = ١٢ + ٢٠ \quad ١٦ = \frac{١٢+٢٠}{٢}$$

$$١٧) \quad ١٧ = ١٢ + ٢٢ \quad ١٧ = \frac{١٢+٢٢}{٢}$$

$$١٨) \quad ١٨ = ١٢ + ٢٤ \quad ١٨ = \frac{١٢+٢٤}{٢}$$

$$١٩) \quad ١٩ = ١٢ + ٢٦ \quad ١٩ = \frac{١٢+٢٦}{٢}$$

$$٢٠) \quad ٢٠ = ١٢ + ٢٨ \quad ٢٠ = \frac{١٢+٢٨}{٢}$$

$$٢١) \quad ٢١ = ١٢ + ٣٠ \quad ٢١ = \frac{١٢+٣٠}{٢}$$

$$٢٢) \quad ٢٢ = ١٢ + ٣٢ \quad ٢٢ = \frac{١٢+٣٢}{٢}$$

$$٢٣) \quad ٢٣ = ١٢ + ٣٤ \quad ٢٣ = \frac{١٢+٣٤}{٢}$$

$$٢٤) \quad ٢٤ = ١٢ + ٣٦ \quad ٢٤ = \frac{١٢+٣٦}{٢}$$

$$٢٥) \quad ٢٥ = ١٢ + ٣٨ \quad ٢٥ = \frac{١٢+٣٨}{٢}$$

$$٢٦) \quad ٢٦ = ١٢ + ٤٠ \quad ٢٦ = \frac{١٢+٤٠}{٢}$$

$$٢٧) \quad ٢٧ = ١٢ + ٤٢ \quad ٢٧ = \frac{١٢+٤٢}{٢}$$

$$٢٨) \quad ٢٨ = ١٢ + ٤٤ \quad ٢٨ = \frac{١٢+٤٤}{٢}$$

$$٢٩) \quad ٢٩ = ١٢ + ٤٦ \quad ٢٩ = \frac{١٢+٤٦}{٢}$$

$$٣٠) \quad ٣٠ = ١٢ + ٤٨ \quad ٣٠ = \frac{١٢+٤٨}{٢}$$

$$٣١) \quad ٣١ = ١٢ + ٥٠ \quad ٣١ = \frac{١٢+٥٠}{٢}$$

$$٣٢) \quad ٣٢ = ١٢ + ٥٢ \quad ٣٢ = \frac{١٢+٥٢}{٢}$$

$$٣٣) \quad ٣٣ = ١٢ + ٥٤ \quad ٣٣ = \frac{١٢+٥٤}{٢}$$

$$٣٤) \quad ٣٤ = ١٢ + ٥٦ \quad ٣٤ = \frac{١٢+٥٦}{٢}$$

$$٣٥) \quad ٣٥ = ١٢ + ٥٨ \quad ٣٥ = \frac{١٢+٥٨}{٢}$$

$$٣٦) \quad ٣٦ = ١٢ + ٦٠ \quad ٣٦ = \frac{١٢+٦٠}{٢}$$

$$٣٧) \quad ٣٧ = ١٢ + ٦٢ \quad ٣٧ = \frac{١٢+٦٢}{٢}$$

$$٣٨) \quad ٣٨ = ١٢ + ٦٤ \quad ٣٨ = \frac{١٢+٦٤}{٢}$$

$$٣٩) \quad ٣٩ = ١٢ + ٦٦ \quad ٣٩ = \frac{١٢+٦٦}{٢}$$

$$٤٠) \quad ٤٠ = ١٢ + ٦٨ \quad ٤٠ = \frac{١٢+٦٨}{٢}$$

$$٤١) \quad ٤١ = ١٢ + ٦٩ \quad ٤١ = \frac{١٢+٦٩}{٢}$$

$$٤٢) \quad ٤٢ = ١٢ + ٧٠ \quad ٤٢ = \frac{١٢+٧٠}{٢}$$

$$٤٣) \quad ٤٣ = ١٢ + ٧١ \quad ٤٣ = \frac{١٢+٧١}{٢}$$

١٠٠. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١١. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٢. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٣. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٤. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٥. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٦. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٧. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٨. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

١٩. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

٢٠. بوسط حسابی میں ۱۰۰ ہے

$$\begin{aligned} 100 &= (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= \frac{100(101)}{2} = 5050 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} &= \frac{1}{4} \quad (1) \\ (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{3} &= \frac{1}{9} \quad (2) \\ 11 & \quad (3) \end{aligned}$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$11 = [18 + 1] \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$11 = 11 \quad (5)$$

$$11 = 11 \quad (6)$$

$$11 = 11 \quad (7)$$

$$11 = 11 \quad (8)$$

$$11 = 11 \quad (9)$$

$$11 = 11 \quad (10)$$

$$11 = 11 \quad (11)$$

$$11 = 11 \quad (12)$$

$$11 = 11 \quad (13)$$

$$11 = 11 \quad (14)$$

$$11 = 11 \quad (15)$$

$$11 = 11 \quad (16)$$

$$11 = 11 \quad (17)$$

$$11 = 11 \quad (18)$$

$$11 = 11 \quad (19)$$

$$11 = 11 \quad (20)$$

$$11 = 11 \quad (21)$$

$$11 = 11 \quad (22)$$

$$11 = 11 \quad (23)$$

$$11 = 11 \quad (24)$$

$$11 = 11 \quad (25)$$

$$11 = 11 \quad (26)$$

$$11 = 11 \quad (27)$$

$$11 = 11 \quad (28)$$

$$11 = 11 \quad (29)$$

$$11 = 11 \quad (30)$$

$$11 = 11 \quad (31)$$

$$11 = 11 \quad (32)$$

$$11 = 11 \quad (33)$$

$$11 = 11 \quad (34)$$

$$11 = 11 \quad (35)$$

$$11 = 11 \quad (36)$$

$$11 = 11 \quad (37)$$

$$11 = 11 \quad (38)$$

$$11 = 11 \quad (39)$$

$$11 = 11 \quad (40)$$

$$11 = 11 \quad (41)$$

$$11 = 11 \quad (42)$$

$$11 = 11 \quad (43)$$

$$11 = 11 \quad (44)$$

$$11 = 11 \quad (45)$$

$$11 = 11 \quad (46)$$

$$11 = 11 \quad (47)$$

$$11 = 11 \quad (48)$$

$$11 = 11 \quad (49)$$

$$11 = 11 \quad (50)$$

$$11 = 11 \quad (51)$$

$$11 = 11 \quad (52)$$

$$11 = 11 \quad (53)$$

$$11 = 11 \quad (54)$$

$$11 = 11 \quad (55)$$

$$11 = 11 \quad (56)$$

$$11 = 11 \quad (57)$$

$$11 = 11 \quad (58)$$

$$11 = 11 \quad (59)$$

$$11 = 11 \quad (60)$$

$$11 = 11 \quad (61)$$

$$(117, 171, 258) \text{ (14)}$$

$$31 - x(1-u) \times 11 + 75 = 111 + 1 = 112$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1 + u(1-12)] \times \frac{1}{4} = 112$$

$$(u - 11)u = 112$$

$$u = 112 - u(11 - u)$$

$$0 = u \quad \text{or} \quad u = (11 - u)(112 + u)$$

$$1 - x = 1 \quad \text{or} \quad 37 = 1 \text{ (15)}$$

$$1 < 37$$

$$1 + \frac{37}{4} < 112$$

$$1 - x(1-u) + 37$$

$$1 = u \quad \text{or} \quad 1 < u$$

$$1 = 112$$

$$1 - x(1-u) + 37 = 112$$

$$1 < 37$$

$$[1(1-u) + 37] \frac{1}{4} < 112$$

$$1 - x(1-u) + 37 < 112$$

$$11 = u$$

$$11 > u \quad \text{or} \quad 11 > u$$

$$1 - x = 1 \quad \text{or} \quad 75 = 1 \text{ (16)}$$

$$1 < 75$$

$$1 + \frac{75}{4} > 112$$

$$1 - x(1-u) + 75$$

$$13 = u \quad \text{or} \quad 13 > u$$

$$13 = 112$$

$$119 = 112$$

$$[1(1-u) + 75] \frac{1}{4} = 112$$

$$12 = 112$$

$$12 = [1(1-u) + 75] \frac{1}{4}$$

$$12 = 12 + u(11 - u) \quad \text{or} \quad 12 = (1 + u - 11)u$$

$$1 = u \quad \text{or} \quad 1 = u$$

$$(117, 171, 258) \text{ (17)}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112 \quad \text{or} \quad 12 = 112$$

$$(12) = 112 + 12 = 124 \quad \text{or} \quad [12 + 12] \frac{1}{4} = 124$$

$$\begin{cases} (12) & 12 = 112 + 12 \\ (12) & 12 = 12 + 12 \end{cases}$$

$$1 = 112 \quad \text{or} \quad 1 = 12 \quad \text{or} \quad 1 = 12$$

$$(117, 171, 258) \text{ (18)}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112 \quad \text{or} \quad 12 = 112 \text{ (18)}$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 = 112$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 = 112$$

$$12 = 112 \quad \text{or} \quad 12 = 112 \text{ (19)}$$

$$112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = 12(1-u) + 12 \quad \text{or} \quad 112 = 12(1-u) + 12$$

$$112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = (12 + 12)u \quad \text{or} \quad 112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4}$$

$$(12) = 112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = (12 + 12)u \quad \text{or} \quad 112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = 12 + 12 + 12 \quad \text{or} \quad 112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = 12 + 12 + 12 \quad \text{or} \quad 112 = 12 + 12 + 12 \text{ (20)}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = 12 + 12 + 12 \quad \text{or} \quad 112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = 12 + 12 + 12$$

$$112 = 12 + 12 + 12 \quad \text{or} \quad 112 = 12 + 12 + 12 \text{ (21)}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} > 112$$

$$1 + \frac{112}{4} < 112 \quad \text{or} \quad 112 < (1-u)112 - 112$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 < 112$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 = 112 \text{ (22)}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} < 112$$

$$1 + \frac{112}{4} > 112 \quad \text{or} \quad 112 < (1-u)112 - 112$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 > 112$$

$$112 < 112 + 112 + 112 \text{ (23)}$$

$$112 = 112 \quad \text{or} \quad 112 > 112 \quad \text{or} \quad 112 < 112$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = [12(1-u) + 12] \frac{1}{4} = 112$$

$$u_1 - u = 22 \Leftrightarrow (1 - u + 1) \frac{2}{3} = 22$$

$$1 = (19 + u)(1 - u) \Leftrightarrow 1 = 19 - u - 19u - u^2$$

$$\text{بحال } 19 = u$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1 \quad (17)$$

$$19 = [19 + 12] \frac{2}{3} \quad \therefore$$

$$(1) \Rightarrow 19 = 19 + 12$$

$$0 = (19 + 1) - (19 + 1 + 19 + 1)$$

$$19 = 19 + 12 \quad (2) \text{ و } (1) \text{ من } (2) \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 19 = 19$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (19, 19)$$

$$13 = 12 + 1 \quad (18)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 13 = 12 + 1 \Leftrightarrow 13 = 12 + 1 + 12 + 1$$

$$\frac{12-13}{1} = 1 \quad 12 - 13 = 1$$

$$1 = (12 + 1)(12 + 1) \Leftrightarrow 1 = 12 \times 12$$

$$1 = \left(12 + \frac{12-13}{1} \right) \left(12 + \frac{12-13}{1} \right)$$

$$1 = \left(\frac{12+12-13}{1} \right) \left(\frac{12+12-13}{1} \right)$$

$$1 = \frac{12-13}{1} \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{12-13}{1} \right) \left(\frac{12-13}{1} \right)$$

$$1 = 1 \quad 12 = 12 \Leftrightarrow 12 = 12 - 12$$

$$12 = 1 \quad 13 = 12 - 1 \quad (1) \text{ بالتعويض في } (1)$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (12, 12)$$

$$1 = 1 \quad (13-12) \times 1 = 1$$

$$16 = 15 + 1 \quad (19)$$

$$16 = 15 + 1 \Leftrightarrow 16 = 15 + 1 + 15 + 1$$

$$(1) \quad 16 = 15 + 1$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (15, 15)$$

$$16 = 15 + 1$$

$$(2) \text{ و } (1) \text{ من } (2) \Rightarrow 16 = 15 + 1$$

$$16 = 1 \quad 1 = 1$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (15, 15)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1$$

$$16 = [16 + 12 + 12 + 1] \frac{2}{3} = 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1 \quad (20)$$

$$(16 - u + 12) \frac{2}{3} = 1$$

$$16 - u + 12 = 19 \Leftrightarrow [16 + u + 1] u = 19$$

$$1 = 16 - u + 12 \Leftrightarrow 1 = 19 - u - 16 - u - 1$$

$$16 - u + 12 = 19 \Leftrightarrow 1 = (16 + u)(1 - u)$$

$$1(1-u) + 1 = 19 \quad (21)$$

$$1(1-u) + 19 = 19$$

$$(1+1) = \frac{2}{3} = 19 \quad (1) \Rightarrow 19 = 1(1-u)$$

$$(11-1) \times \frac{2}{3} = 19 \quad (22 - 19) \frac{2}{3} = 19$$

$$(1) \Rightarrow 19 = 19 \quad (2) \Rightarrow 19 = 19$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (19, 19)$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 \quad 19 = 19 \quad (23)$$

$$19 = [19 + 12] \frac{2}{3} \quad 19 = 19$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 \times \frac{2}{3}$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 + 12$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (19, 19)$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 \quad 19 = 19 \quad (24)$$

$$19 = [19 - 12] \frac{2}{3} \quad 19 = 19$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 \times \frac{2}{3}$$

$$19 = 19 + 1 \quad 19 + 1 = 19$$

$$\frac{19-19}{1} = 1 \quad 19 = 19 + 12$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (19, 19) \quad 19 = 19$$

$$1 + 19 = 19 \quad 19 = 19 - 19 \quad 19 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 + 1 \quad (25)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1$$

$$[1 + 19 + 19 - 12] \frac{2}{3} = 19$$

$$19 = 19 \quad 19 = 19 \Leftrightarrow [19 + 12] u = 19$$

$$19 = 19 \Leftrightarrow 19 = 19 + 1 \quad (26)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1$$

$$19 = [19 + 12] \frac{2}{3} = 19$$

$$\therefore \text{النتيجة هي } (19, 19)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{2}{3} = 1$$

$$(1) \Rightarrow 21 = 12 + 1 \Rightarrow 21 = 1 \cdot 2 \quad (25)$$

$$(12 + 1) \cdot 2 = (12 + 1) \cdot \frac{2}{1} = (12 + 1) \cdot 2$$

$$[12 + 1] \cdot \frac{2}{1} = (12 + 1) \cdot 2$$

$$[12 + 1 + 1 + 1] \cdot \frac{2}{1} =$$

$$[12 + 1] \cdot 2 = [12 + 1] \cdot \frac{2}{1} =$$

$$\frac{1}{1} = \frac{12+1}{12+1} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{(12+1) \cdot 2}{(12+1) \cdot 2}$$

$$(2) \Rightarrow \text{مضروب} = 12 - 1 \therefore 12 + 1 = 12 + 1 \cdot 2$$

$$1 = 1 \therefore 12 = 1 \therefore (2) \text{ و } (1)$$

$$\text{المتتالية هي } (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

$$\text{حل آخر: لاحظ أن مجموع الخمس حدود الأولى}$$

$$= 5 = \text{الحدا الأوسط للخمسة حدود الأولى}$$

$$\text{حيث } 5 = 1 + 4$$

$$\text{مجموع الخمس حدود المتتالية } = 5 = \text{الحدا الأوسط لهم } = 5 = 1 + 4$$

$$\frac{1}{1} = \frac{(12+1) \cdot 2}{(12+1) \cdot 2} \therefore \frac{1}{1} = \frac{2 \cdot 12}{12 \cdot 2}$$

$$12 + 1 = 1 \Rightarrow 12 + 1 + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \quad (26)$$

$$[12 + 1] \cdot \frac{2}{1} = 12 = [1(1-0) + 12] \cdot \frac{2}{1}$$

$$[12 + 12 \cdot 0] = [1(1-0) + 12 \cdot 0] \cdot \frac{2}{1}$$

$$12 \cdot 0 = 0 = [12 \cdot 0] \cdot \frac{2}{1}$$

$$0 = (12 - 0)(12 - 0) \Rightarrow 0 = 12 \cdot 0 + 0 \cdot 12 - 0$$

$$0 = 0 \quad \text{و } 0 = 0$$

$$12 = (12 + 12) \cdot 2 - (12 + 12) \cdot 2 \quad (27)$$

$$(28) \quad 12 = 12 + 12 \therefore$$

$$12 = 12 \Rightarrow 12 = 12 + 1$$

$$[12 + 1] \cdot 10 = [12 + 1] \cdot \frac{10}{1} =$$

$$12 = 12 + 10 = 12 \cdot 2 + 10 =$$

$$(1) \Rightarrow 12 + 1 = 1 \Rightarrow 12 + 1 - 1 = 12 + 1 - 1 = 12 + 1 - 1 \quad (28)$$

$$12 = \frac{12 + 1 + 12 + 1}{1}$$

$$12 + (1) = 12 + 1 = 1 - (1) = 12 + 12 + 12$$

$$1 = 12 - 12 -$$

$$12 = 12 + 12$$

$$(1) \Rightarrow 12 = 12 \therefore 12 = 12 -$$

$$(1) \Rightarrow 12 = 1 + 1 \quad (29)$$

$$(2) \Rightarrow 12 = 12 + 1$$

$$\text{بالتعويض في (1)} \quad 12 = 1 \therefore 12 = 12 -$$

$$12 = 1 \therefore 12 = 12 - 1$$

$$\dots \text{المتتالية هي } (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

$$1 < 1(1-0) + 1 \Rightarrow 1 < 1$$

$$12 = 0 \Rightarrow 1 < 12 + 0 \cdot 12 - 12$$

$$[1(1-0) + 12] \cdot \frac{2}{1} =$$

$$12 \cdot 2 = [12 - 12] \cdot 12 \cdot 12$$

$$12 = 1 \therefore 12 = [12 + 12] \cdot \frac{2}{1} \quad (30)$$

$$\dots \text{المتتالية هي } (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

$$12 < 12(1-0) + 12 = 12 < 12$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 \cdot \frac{1}{1}$$

$$[12 - 12 + 12] \cdot 2 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 \Rightarrow 12 = 12 - 12 = 12 =$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 + 12 \cdot 12$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12$$

$$(1) \Rightarrow 12 = (12 + 12) \cdot \frac{2}{1} =$$

$$12 + 12 = 12 + 12$$

$$12 + 12 = (12 + 12) \cdot \frac{2}{1} = (12 + 12) \cdot \frac{2}{1}$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 + 12 \cdot 12$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12$$

$$\dots \text{المتتالية هي } (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

$$(1) \Rightarrow 12 = 12(1-0) + 12$$

$$(1) \Rightarrow 12 = 12(1-0) + 12$$

$$12 = 12(1-0) + 12$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 - 12 = 12 =$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 - 12 = 12 =$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 - 12 = 12 =$$

$$12 = 12 \therefore 12 = 12 - 12 = 12 =$$

$$(1) \Rightarrow 12 = 12 \therefore 12 = 12 -$$

$$\therefore \text{عدد الحدود } 12 = 12$$

$$[2 - u^2 + 1 + u] \frac{u}{4} = u^2$$

$$u + u^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad (u + u^2)u = u^2$$

$$(u - u^2) \frac{1}{4} = u \quad \Rightarrow \quad u - u^2 = 4u$$

③ من المتتابعة الحسابية بالة من الترميز الثانية في

$$\frac{u + u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{u}{u} \times \frac{1 + u^2}{1 + u^2} = \frac{u}{u}$$

$$1 - u = u$$

$$[1 - u + (1 - u)^2] - u + u^2 =$$

$$[1 - u + 1 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$[2 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$2 - u + u^2 - u + u^2 =$$

$$2 - u + u^2$$

$$1 - u = u$$

$$[(1 - u) + (1 - u)^2] - u + u^2 =$$

$$[1 - u + 1 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$2 + u^2 - 2u - u + u^2 =$$

$$2 + u^2 - u$$

$$\frac{(1 - u^2)^2}{(1 + u^2)^2} = \frac{u^2}{u^2}$$

$$\frac{v}{8} = \frac{10}{18} = \frac{1 - 12 \times 2}{1 + 12 \times 2} = \frac{11}{13}$$

$$⑤ \quad [2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[u^2 + 1 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[2(1 - u^2) + 1 + u + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[2 - 2u^2 + 1 + u + 1] \frac{u}{4} =$$

$$⑥ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[u^2 + 1 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[2(1 - u^2) + 1 + 2(1 - 1 + u^2) + 1] \frac{u}{4} =$$

$$⑦ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[2(1 - u^2) + 1] \frac{u^2}{4} =$$

$$⑧ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} \times 3 =$$

$$⑨ \quad u = u^2$$

$$1 - u = u$$

$$⑩ \quad 2(1 - u) + 1 = u^2$$

$$⑪ \quad u = 2(1 - u) + 1$$

$$2(1 - u^2) + 1 = u^2$$

$$⑫ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$u - u^2 = 2 + u - 2 - 2u^2$$

$$⑬ \quad u^2 = 2u$$

$$u = (2 - 1)(1 - u) + 1$$

$$2 - u = 1$$

$$[2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[(2 - 1)(1 - u^2) + (2 - u^2)] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$[2 + u^2 - u^2] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$(\frac{2}{4}) \quad [2 - u - 1] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$u^2 - u^2 = u^2$$

$$u^2 = u^2$$

$$u = (2 - u)(1 + u)$$

$$⑭ \quad u = u$$

$$u = u$$

⑮ أولاً، أوجد الأول u من الأوساط الحسابية،

بالتحديد الأخير

$$\therefore \text{الوسط الأول} = 1 + 2 \quad \text{الوسط الأخير} = u - 2$$

$$\therefore \frac{1}{4} = [1 + 1] \frac{u}{4}$$

$$[u + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

ثانياً، أوجد (الوسط الحسابي) u

بفرض أن الأسس u

$$\therefore \text{الوسط الأول} = 1 + 2 \quad \text{الوسط الأخير} = u - 2$$

$$\therefore \frac{u}{4} = (\text{الوسط الأول} + \text{الوسط الأخير})$$

$$[u + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

$$\therefore \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore u = 1$$

$$⑯ \quad 1 + u^2 = 1$$

$$2 = (1 + u^2) - 1 + u^2 = 2$$

$$[2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[2(1 - u) + 1 + 2 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[1 - u^2 + u^3 - u^4]d = u^3(1-u)d - u^4d =$$

$$1 - u^2 = 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3 \quad (1)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 4(1-u) + 12$$

$$[1(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4} = u^3$$

$$[1(1-u^2) + 12] u = u^3$$

$$(2) \Rightarrow 1 = 4(1-u^2) + 12 \quad \text{بطرح (1) من (2)}$$

$$1 = 4u \Rightarrow 1 = 4u$$

$$[1(1-u^4) + 12] \frac{u^4}{4} = u^3$$

$$[1 - 4u^4 + 12] u^2 =$$

$$[1 + 8 - 4u^4] u^2 =$$

$$[1 + 8 - 4u^4] u^2 =$$

$$1 = 4u^2 \Rightarrow 1 = 4u^2$$

$$u = \frac{1}{2}$$

$$1(1-u) + 1 = 1 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 4u + 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 4(1-u) + 12$$

$$1(1-u) + 12 = (12 + 1)u$$

$$1(1-u) + 12 = 13u + 12$$

$$1 = 13u \Rightarrow u = \frac{1}{13}$$

$$1(1-u) = 12$$

$$(4) \Rightarrow \text{عدد الحدود زوجي} \Rightarrow \text{نفر من أول عدد الحدود } u$$

$$\Rightarrow \text{الحدان الأوسط هما } u^5 \text{ و } u^6$$

$$1(1-u) + 1 = 1$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 4(1-u) + 12$$

$$1(1-u) + 1 = 13u + 12$$

$$1(1-u) + 12 = 13u + 12$$

$$[1(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4} = u^3$$

$$[1(1-u^2) + 12] u = u^3$$

$$1 = 4u \Rightarrow u = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحدود } u^2 = 20 \Rightarrow 20 = 20 \Rightarrow 20 = 20 \Rightarrow 20 = 20$$

$$\begin{cases} 11 + 1 = 12, 6 \\ 11 + 1 = 12, 6 \end{cases}$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1, 6 = 1$$

$$\Rightarrow \text{الحد الأخير } 1, 6$$

$$12, 6 = 1 \Rightarrow 1, 6 = 12, 6 + 1 = 13, 6 + 1 = 14$$

$$(1) \Rightarrow 1 + u^2 = 12 \quad \text{اقتطاعه من (1)}$$

$$u^2 = \text{عدد الحدود}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{[1(1-u) + 12] \frac{u}{4}}{[12(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4}} = \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{12 + 12}{12 + 12} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{24}{24}$$

$$12 = u^2 \Rightarrow u^2 = 12 \Rightarrow u = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحدود } 12 = u^2$$

$$1 = 12 = 12 \quad (1)$$

$$12 = 12 + 12 = 24 \Rightarrow 12 = 24 + 12 = 36$$

$$\Rightarrow \text{اقتطاعه من (1)}$$

$$u^2 = \text{عدد الحدود}$$

$$\text{مجموع الثلاثة الأخير } 12 = \text{مجموع الثلاثة الأول}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{[1(1-u) + 12] \frac{u}{4}}{[1(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4}} = \frac{1}{u^2}$$

$$[1(1-u) + 12] u = [1(1-u^2) + 12] u^2$$

$$[1(1-u) + 12] u = [1(1-u^2) + 12] u^2$$

$$12 + 12 = 12 + 12$$

$$12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحدود } 12 = u^2$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$\Rightarrow (12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12) \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$12 = 12 = 12 \Rightarrow 12 = 12$$

$$\frac{7}{8} = f \Rightarrow 7 = 8f \Rightarrow 8f = 7 \Rightarrow \frac{7}{8} = f$$

$$(\dots, 196, 392) \text{ و } (\dots, 196, 392, 784)$$

$$7 = 8f + f \Rightarrow (\dots, 196, 392, 784) \quad (1)$$

$$10 = 8f + f + 1 \Rightarrow$$

$$10 = 1 \Rightarrow 784 = 784 + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{17}{8} = \frac{34}{16} = 2f + f + 1 \Rightarrow 10 = (2f + f + 1)f$$

$$10 = (3 - 2f)(1 + 2f) \Rightarrow 10 = 1 - 4f + 6f^2$$

$$\frac{1}{8} = f \quad \text{و} \quad \frac{5}{8} = f$$

$$(\dots, 196, 392, 784) \quad (\dots, 196, 392, 784, 1568)$$

$$10 = 9 = (f + 1)f \Rightarrow 9 = f^2 + f \quad (2)$$

$$10 = 9A = (f + 1)^2 f \Rightarrow 9A = f^2 + 2f^3$$

$$9A = f^2 \Rightarrow \text{بقسمة (2) على (1)}$$

$$f = 1 \Rightarrow \text{بالتعويض في (1)}$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$10 = 9A = (1 - f)f \Rightarrow 9A = 1 - f^2 \quad (3)$$

$$10 = 9A = (1 - f)f \Rightarrow 9A = 1 - f^2$$

$$f = \frac{10}{9} = \frac{(1 - f)f}{(1 - f)f} \Rightarrow \text{بقسمة (3) على (1)}$$

$$\frac{1}{9} = f$$

$$9 = (\frac{1}{9} - \frac{1}{9})f \Rightarrow \text{بقسمة (3) على (1)}$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$10 = 12 = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{12} \quad (4)$$

$$10 = 12 = (1 - f^2)f \Rightarrow 12 = 1 - f^2$$

$$12 = \frac{(1 - f^2)f}{(1 - f^2)f} \Rightarrow \text{بقسمة (4) على (1)}$$

$$\frac{1}{12} = 1 \Rightarrow f = 1 \Rightarrow 12 = 12 \Rightarrow 12 = 1 - 12$$

$$(\dots, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$(\dots, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$10 = 8 = f \quad (5)$$

$$f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} = f \Rightarrow \frac{1}{8} = f$$

$$10 = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} = f$$

$$(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$1 > 1 - u(\frac{1}{8}) = 784 \Rightarrow 1 > 1 - u \quad (6)$$

$$\frac{1}{8} > 1 - u(\frac{1}{8}) \Rightarrow$$

$$784 > 1 - u \Rightarrow 784 > 1 - u \Rightarrow 784 > 1 - u \Rightarrow$$

$$A = u \Rightarrow 784 < u \Rightarrow$$

$$(7) = 784 = f^2 \quad (8) = 784 = f^2 \quad (A)$$

$$784 = f^2 \Rightarrow A = f^2 \Rightarrow \text{بقسمة (7) على (8)}$$

$$784 = 1 \Rightarrow \text{ومن (1)}$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$(7) = 784 = f^2 \quad (8) = 784 = f^2 \quad (9)$$

$$784 = f^2 \Rightarrow \text{بقسمة (7) على (8)}$$

$$784 = 1 \Rightarrow \text{بالتعويض في (1)}$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$(7) = \frac{1}{8} = f^2 \quad (8) = \frac{1}{8} = f^2 \quad (10)$$

$$\frac{1}{8} = f^2 \Rightarrow \text{بقسمة (7) على (8)}$$

$$\frac{1}{8} = f \Rightarrow \frac{1}{8} = f$$

$$\frac{1}{8} = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow \text{بالتعويض في (1)}$$

$$(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$\frac{1}{8} = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \quad (11)$$

$$\frac{1}{8} = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \Rightarrow 12 = f^2$$

$$12 = f^2 + f \Rightarrow 12 = f^2 + f$$

$$12 = (\frac{1}{8})f + \frac{1}{8} = 1$$

$$12 = 1 \Rightarrow 12 = 1 \Rightarrow \frac{9}{12}$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$12A = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \Rightarrow 12 = f^2 \Rightarrow \frac{1}{8} = f \quad (12)$$

$$(\dots, 196, 392, 784)$$

$$12 = f^2 + f \quad (13) = 12 = f^2 + f$$

$$12 = (f^2 + f)f \Rightarrow$$

$$12 = f^2 + f \Rightarrow \frac{12}{f} = \frac{f^2 + f}{f} = \frac{f^2 + f}{f}$$

$$12 = (1 - f)(1 - f) \Rightarrow 12 = 1 - 2f + f^2$$

$$\left[(1 \times (1-19) + 19 \times 1) \right] \frac{19}{1} = 18$$

هـ $18 = 19$ \therefore عند القاطع 19

$$\sqrt{10 \times 1} \cdot 2 = 10 = 10 \times 1 = 10 \quad (1) \quad (2)$$

$$10 = 10 \quad \text{d} \quad 10 = 10 \quad \therefore \quad 10 = 10$$

$$\sqrt{181} \cdot 2 = 18 = 18 = 18 \times 1 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad \text{d} \quad 18 = 18$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$\frac{18}{1} = 18 \quad (1)$$

$$\frac{18}{1} = 18 \quad (2)$$

$$\frac{18}{1} = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$18 = 18 \quad (3)$$

$$(181, 17, 9, 1, 1)$$

$$18 = 18 \quad (1)$$

$$18 = 18 \quad (2)$$

$$17 = 13 \Leftrightarrow 17 = 13 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4 = 13 + 1 + 3$$

بشرط الحدوث ① في ٢

$$17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية هي (17, 13, 9, ...)

$$① \rightarrow 17 = 13 + 4$$

في متتالية هندسية

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية الحسابية هي (17, 13, 9, ...)

$$② \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$① \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$② \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية الحسابية هي (17, 13, 9, ...)

$$③ \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$④ \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية الحسابية هي (17, 13, 9, ...)

$$⑤ \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$① \rightarrow 17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$② \rightarrow 17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

بشرط ① على ②

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{13} \Leftrightarrow \frac{1}{17} = \frac{1}{13}$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

يوجد متتاليتان هندسيتان بالتعويض في ①

$$17 = 13 + 4$$

المتتالية الأولى هي (17, 13, 9, ...)

المتتالية الثانية هي (17, 13, 9, ...)

$$③ \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية هي (17, 13, 9, ...)

نقضي أن الأعداد 17, 13, 9

$$① \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$② \rightarrow 17 = 13 + 4$$

بشرط ① على ②

$$\frac{1}{17} = \frac{1}{13} \Leftrightarrow \frac{1}{17} = \frac{1}{13}$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

المتتالية هي (17, 13, 9, ...)

$$④ \rightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$17 = 13 + 4 \Leftrightarrow 17 = 13 + 4$$

$$\frac{1}{r} = r \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$\frac{1}{r} = 1 \text{ و } r = 1$$

$$\frac{r+1}{r} = \frac{1-\frac{1}{r} \times \frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{1-r}{1-r} = 1$$

$$r \text{ ②} \quad r \text{ ③} \quad r \text{ ④} \text{ ①}$$

$$r \text{ ⑤} \quad r \text{ ⑥} \quad r \text{ ⑦}$$

$$\frac{1}{r} = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$17r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - 17A =$$

$$1-17r \times \frac{1}{r} = 1 \text{ و } 1-17r \times \frac{1}{r} = 1 \text{ و } 1-17r \times \frac{1}{r} = 1$$

$$A = 1 \text{ و } r = 1-17r \text{ و } 1-17r = 17A$$

$$\text{②} \rightarrow 17r = 1 \text{ و } \text{③} \rightarrow 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

بقسمة ② على ③:

$$\text{①} \rightarrow 17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$(-17r \times 1) \div (-17r \times 1) = 1 \div 1 = 1$$

$$17r = \frac{17A}{r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$17A = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$\frac{17A}{r} = 1$$

$$r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

هذا هو الجواب

$$17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$\frac{17r - 1}{1-r} = 17r \text{ و } \frac{1-r}{1-r} = 1$$

$$17r - 1 = 17r - 17r$$

$$17r = 17r \text{ و } 17r = 17r \text{ و } 17r = 17r$$

$$(-17r \times 1) \div (-17r \times 1) = 1 \div 1 = 1$$

$$r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$\frac{1-17r}{1-r} = 17r \text{ و } \frac{1-r}{1-r} = 1$$

$$1-17r = 1-17r \text{ و } 1-17r = 1-17r$$

$$1 = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } 1 = 1$$

$$(-17r \times 1) \div (-17r \times 1) = 1 \div 1 = 1$$

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r}$$

لا يمكن جمع هذه الأعداد من صفرها

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} \text{ ①}$$

$$1A = \frac{1}{r} \div \frac{1}{r} = 1$$

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r}$$

لا يمكن جمعها إلى 1

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} \text{ ②}$$

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} \text{ ③}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} \div \frac{1}{r} = 1$$

$$1 < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} < \frac{1}{r} \text{ ④}$$

$$17r = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ①}$$

$$17r = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ②}$$

$$17r = \frac{1-17r}{1-r} \div \frac{1-17r}{1-r} = 1$$

$$17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ③}$$

$$17r = \frac{1-17r}{1-r} \div \frac{1-17r}{1-r} = 1$$

$$1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ④}$$

$$17r = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ⑤}$$

$$17r = \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} \div \frac{(1-17r) \times 1}{1-r} = 1$$

$$17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ⑥}$$

$$17r = \frac{1-17r}{1-r} \div \frac{1-17r}{1-r} = 1$$

$$1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1 \text{ ⑦}$$

$$17r = 1 \text{ و } r = 1 \text{ و } 1 = 1 \text{ و } r = 1$$

$$17r = \frac{1-17r}{1-r} \div \frac{1-17r}{1-r} = 1$$

$$189 = \frac{(1-2^7)3}{1-2} = 3 \text{ هـ.} \quad \text{①}$$

$$A) = 2 \text{ هـ.} \quad 12 = 2^3 = 8 \text{ هـ.} \quad 1-2 = -1 \text{ هـ.} \quad \text{②}$$

$$3 = 2 \text{ هـ.} \quad 189 \cdot 3 = 567 = 3 \text{ هـ.} \quad \text{③}$$

$$189 \cdot 3 = \frac{2^7 - 2 \cdot 189 \cdot 3}{1-2} = \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \text{ هـ.}$$

$$\frac{2-100}{2-100} = \frac{2-100}{2-100} = \frac{100}{100} \text{ هـ.} \quad \text{④}$$

متتالية هارمونية

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 0 = 2^{-1}(2) \times 1 = 1 \text{ هـ.}$$

$$2 = \frac{(1-2^2)2}{1-2} \quad \frac{(1-2^2)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$0 = 1 + \frac{1000}{2} = 500 \text{ هـ.}$$

$$2 = 500 \text{ هـ.} \quad 2 = 500 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2^{-1} \cdot 2 = 1 \text{ هـ.} \quad 1 = 1 \text{ هـ.} \quad \text{⑤}$$

$$2 = 2^{-1} \cdot 2 = 1 \text{ هـ.} \quad 2 = 1 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2^{-1} \cdot 2 = 1 \text{ هـ.} \quad 2 = 1 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2, 78 = \frac{(1-2^7)2}{1-2} \quad \frac{(1-2^7)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑥}$$

$$(2) = 288 = \frac{(1-2^8)2}{1-2} \quad \frac{(1-2^8)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = \frac{288}{2, 78} = 2 \text{ هـ.} \quad (1) \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$\frac{(1-2^7)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.} \quad \frac{(1-2^7)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑦}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2, 78 = 2 \text{ هـ.} \quad (2) = 288 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.} \quad (2) = 288 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑧}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(2) = 288 = (1-2^8)2 \text{ هـ.}$$

$$\frac{2}{2} = \frac{2}{(1-2^8)} \quad \frac{2}{2} = \frac{2}{(1-2^8)}$$

$$1 = 2 - 2^8 = -256 \text{ هـ.}$$

$$2 = (2-2^8)(1+2^8)$$

$$2 = \frac{2}{2} = 1 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = \frac{(1-2^8)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = \frac{1}{2} = 2 \text{ هـ.} \quad 2 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑨}$$

$$\frac{1}{2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$\frac{(1-2^8)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = (1-2^8)2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1-2^8)2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad \frac{28}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad (1) = \frac{(1-2^8)2}{1-2} \quad \text{⑩}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = (1-2^8)(1+2^8)$$

$$2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = (1-2^8)2 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 \text{ هـ.}$$

$$2 = \frac{100}{100} = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑪}$$

$$\frac{(1-2^8)2}{1-2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$x = y = z = 1 \quad (18)$$

$$18 = 1 - x^2 + x^2 = y^2 \quad \& \quad 18 = 1 - y^2 + y^2 = z^2$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$x < \frac{(1-y^2)^2}{1-y^2} \quad \therefore \quad \frac{(1-y^2)^2}{1-y^2} = x$$

$$x < 1 - y^2 \quad \therefore \quad x < 1 - y^2$$

$$x < 1 - y^2 \quad \therefore \quad x < 1 - y^2$$

$$x < 1 - y^2 \quad \therefore \quad x < 1 - y^2$$

$$\frac{1}{x} = y \quad \& \quad \frac{1}{y} = x \quad (19)$$

$$\frac{1-y^2}{y} = \frac{1-x^2}{x} \quad \therefore \quad \frac{1-y^2}{y} = \frac{1-x^2}{x}$$

$$\frac{1-y^2}{y} = \frac{1-x^2}{x}$$

$$x(1-y^2) = y(1-x^2)$$

$$x - xy^2 = y - yx^2$$

$$x - xy^2 = y - yx^2 \quad \therefore \quad x - xy^2 = y - yx^2$$

$$x - xy^2 = y - yx^2 \quad \therefore \quad x - xy^2 = y - yx^2$$

$$x - xy^2 = y - yx^2 \quad \therefore \quad x - xy^2 = y - yx^2$$

هذا الحدود = هذا الحدود

$$① \quad x = \frac{(1-y^2)^2}{1-y^2} = x \quad (20)$$

$$② \quad y = \frac{(1-x^2)^2}{1-x^2} = y$$

بمسألة ① على ②

$$x = \frac{y^2}{1-y^2} = \frac{(1-x^2)^2}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^2}{1-x^2}$$

$$x = 1 \quad \therefore \quad x = 1$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$① \quad x = 1 - y^2 + y^2 = x \quad (21)$$

بمسألة ② والتعويض من ①

$$x = 1 - y^2 + y^2 = x \quad \therefore \quad x = 1 - y^2 + y^2 = x$$

$$x = 1 - y^2 + y^2 = x \quad \therefore \quad x = 1 - y^2 + y^2 = x$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$x = \frac{(1-y^2)^2}{1-y^2} = \frac{(1-y^2)^2}{1-y^2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1-y^2}{y} = \frac{1-y^2}{y} \quad (22)$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$x > \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

لا يمكن جمع عدد لا نهائي من الحدود

$$\frac{1}{y} = x \quad \therefore \quad \frac{1}{y} = x$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad (23)$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$① \quad x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

بمسألة ① على ②

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

المتكافئة هي (18, 18, 18) ...

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad (24)$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1-y^2}{y} = \frac{1-y^2}{y} \quad (25)$$

لا يمكن جمع عدد غير نهائي من الحدود

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$r = r^2 \quad (24)$$

$$\frac{1}{81} = r^4 \quad \therefore$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^4} = r^3 \quad \therefore$$

بحل المعادلتين

$$\frac{1}{r} = r^3 \quad \therefore$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين $27 = 1 \quad \therefore$

النتيجة هي (24, 27, 81, 243, ...)

$\therefore \frac{1}{r} > 1$ يمكن جمع عدد غير منته من حدود النهاية

$$1 - r = \frac{27}{\frac{1}{r} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$r = r^2 - 1 \quad (25)$$

$$r = r^2 - 1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = \infty \quad \therefore$$

$$(1) = r = (r - 1)r$$

بقسمة (1) على (2)

$$(2) = \frac{1}{r-1} = \frac{1}{r-1} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r - 1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = (r - 1)$$

$$\frac{1}{r} = r - 1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r - 1$$

$$\frac{1}{r} = r \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r$$

$$1 = r^2$$

بالتعويض في (1)

النتيجة هي (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)

$$r = r^2 + 1 \quad (26)$$

$$(1) = r = (r^2 + 1)r$$

$$r = r^2 + 1 \quad \therefore$$

$$r = r^2 + 1$$

$$(2) = r = (r + 1)r$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{r}{r} = \frac{(r^2 + 1)r}{(r + 1)r} \quad \therefore$$

$$\frac{r}{r} = \frac{(r^2 + 1)r}{(r + 1)r}$$

$$\frac{r}{r} = \frac{r^2 + 1}{r + 1}$$

$$1 = r + 1 \quad \therefore$$

$$r = r^2 + 1$$

$$0 = (r^2 + 1) - (r + 1)$$

$$0 = 1 \quad \therefore$$

$$\frac{r}{r} = r \quad \therefore$$

النتيجة الأولى (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)

النتيجة الثانية (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)

لا توجد مكتابتان

والنتيجة الثانية يمكن جمع حدودها إلى ∞ لأن $r > 1$

$$1 - r = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$1 = r^2 \quad (27)$$

$$\frac{1}{r} = r^3 \quad \therefore$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3} = r^2 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r^2 \quad \therefore$$

النتيجة هي (27, 27, 27, ...)

$$1 - r = \frac{27}{\frac{1}{r} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$1 = r^2 - 1 \quad (28)$$

$$(1) = 1 = (r^2 - 1)r$$

$$(2) = 1 = \frac{(1 - r^2)r}{1 - r} = 1 \quad \therefore$$

$$1 = \frac{1}{r} = \frac{1}{r \times (1 - r)} \quad \therefore$$

$$(1) = 1 = (r^2 - 1)r$$

$$1 = (1 - r^2)(1 - r^2) \quad \therefore$$

$$1 = 1 - r^2 - r^2 + r^4$$

$$0 = 1 - 2r^2 + r^4 \quad \therefore$$

النتيجة هي (1, 1, 1, 1, 1, ...)

$\therefore r > 1$ يمكن إيجاد

$$1 - r = \frac{1}{\frac{1}{r} - 1} = \infty$$

$$1 = r^2 + 1 \quad (29)$$

$$(1) = 1 = (r^2 + 1)r \quad \therefore$$

$$(2) = 1 = (r + 1)r \quad \therefore$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{1}{1} = \frac{(r^2 + 1)r}{(r + 1)r} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{1} = \frac{r^2 + 1}{r + 1}$$

$$1 = r + 1 \quad \therefore$$

$$0 = (r^2 + 1) - (r + 1)$$

$$\frac{r}{r} = r \quad \therefore$$

النتيجة هي (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)

$$1 - r = \frac{1}{\frac{1}{r} - 1} = \infty$$

$$1 = \frac{r}{r - 1} \quad (30)$$

$$(1) = 1 = (r - 1)r \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r - 1} = \infty \quad \therefore$$

$$1 = r^2 - 1$$

بالقسمة (5) على (3)

$$25 = \frac{r^2}{(r-1)^2}$$

$$\frac{1}{5} = r - 1 \quad \text{أو} \quad 1 = (r-1)^2$$

$$\frac{1}{5} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{5} = r \quad (\text{مرفوض لأن } |r| < 1)$$

بالتعويض في المعادلة الثانية

$$25 = 1 \quad 1 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = 1$$

المتتابعة هي (1, 1/5, 1/25, ...)

$$\frac{1}{5} = (r-1)^2 \quad (r-1)^2 = \frac{1}{5}$$

$$1 = 5 + r^2 - 2r \quad \frac{1}{5} = 1 + r^2 - 2r$$

$$1 = 5 + r^2 - 2r \quad 1 = 5 + r^2 - 2r$$

$$\frac{1}{5} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{5} = r$$

$$41 = 1 \quad 12 = \left(\frac{1}{5}\right) \times 1$$

المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$r_1 = \frac{r^2 + 1}{r}$$

$$12 = 1 + r^2$$

$$12 = (r^2 + 1) \quad \text{أو} \quad 12 = (r^2 + 1)$$

$$r^2(12) = r^2 \quad r^2(12) = r^2$$

$$12 = 12 \quad \text{أو} \quad 12 = 12$$

$$\frac{8}{5} = \frac{12}{5} = \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2}$$

$$8 = 12 = r^2 + 1 \quad \text{أو} \quad 8 = 12 = r^2 + 1$$

$$8 = (r^2 + 1)(1 - r^2)$$

$$\frac{8}{5} = r \quad \text{أو} \quad \frac{8}{5} = r$$

$$781 = 1 \quad 12 = \frac{1}{5} \times 1$$

المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$781 = \frac{781}{1} = 781$$

$$17 \text{ في المتتابعة الحسابية } 2 = 1 + 1 = 3$$

$$\text{في المتتابعة الهندسية } 9 = 3^2$$

$$9 = 3^2$$

$$\text{بالتعويض من (1) في (2)}$$

$$9 = 3 - 1 = 2 \quad \text{أو} \quad 9 = 3 - 1 = 2$$

$$1 = 9 = 3^2 \quad \text{أو} \quad 1 = 9 = 3^2$$

$$\frac{1}{9} = 9 = 3^2 \quad \text{أو} \quad \frac{1}{9} = 9 = 3^2$$

$$1 > 1$$

لا يمكن جمع عدد غير حقيقي من حدود المتتابعة الهندسية

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 1$$

$$\frac{r}{r-1} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{r}{r-1} = 1$$

$$\frac{1}{r} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{r} = r$$

$$r = r^2 \quad \text{أو} \quad r = r^2$$

$$81 = 1 \quad \text{أو} \quad 81 = 1$$

المتتابعة هي (1, 27, 81, ...)

$$\frac{r}{r-1} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{r}{r-1} = 1$$

$$\frac{1}{r} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{r} = r$$

$$9 = r + 1 \quad \text{أو} \quad 9 = r + 1$$

$$9 = 1 \quad \text{أو} \quad 9 = 1$$

المتتابعة هي (1, 3, 9, ...)

$$12 = 12 \quad \text{أو} \quad 12 = 12$$

$$12 = 12 \quad \text{أو} \quad 12 = 12$$

$$\frac{1}{5} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{5} = r$$

الحدود موجبة. المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$32 = \frac{12}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$12 = \frac{1}{r-1} \quad \text{أو} \quad 12 = \frac{1}{r-1}$$

$$12 = \frac{1}{r-1} \quad \text{أو} \quad 12 = \frac{1}{r-1}$$

$$12 = \frac{1}{r-1} \quad \text{أو} \quad 12 = \frac{1}{r-1}$$

$$12 = \frac{1}{r-1} \quad \text{أو} \quad 12 = \frac{1}{r-1}$$

$$12 = \frac{1}{r-1} \quad \text{أو} \quad 12 = \frac{1}{r-1}$$

المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$\frac{1}{r} = r \quad \text{أو} \quad \frac{1}{r} = r$$

$$12 = 12 \quad \text{أو} \quad 12 = 12$$

لا يمكن الجمع إلى

$$\infty \dots + 1,017 + 1,01 + 1,8 = 1,5 \quad (1)$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + 1) \cdot 1,01 + 1,8 =$$

$$\frac{1}{1,8} = 1,5 \therefore \frac{1}{1,8} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,01 + 1,8 =$$

$$1,01601601 = 1,016 \quad (2)$$

$$\infty \dots + 1,01016 + 1,016 + 1,9 =$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + 1) \cdot 1,016 + 1,9 =$$

$$\frac{1}{1,9} = 1,016 \therefore \frac{1}{1,9} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,016 + 1,9 =$$

$$1,019 = \frac{1}{1,9} \quad \text{و } 1,9 = 1 \quad (3)$$

$$1,919191919 = \frac{1}{1,9} \cdot 1,9 = 1,9 \therefore 1,9 = 1,9$$

$$\frac{(1 - \frac{1}{1,9})}{1 - \frac{1}{1,9}} = 1,9$$

$$1,919191919 = \frac{(1 - \frac{1}{1,9})}{1 - \frac{1}{1,9}} = 1,9$$

$\frac{1}{1,9} \quad (4)$	$\frac{1}{1,9} \quad (5)$	$\frac{1}{1,9} \quad (6)$	$\frac{1}{1,9} \quad (7)$
$\frac{1}{1,9} \quad (8)$	$\frac{1}{1,9} \quad (9)$	$\frac{1}{1,9} \quad (10)$	$\frac{1}{1,9} \quad (11)$
$\frac{1}{1,9} \quad (12)$	$\frac{1}{1,9} \quad (13)$	$\frac{1}{1,9} \quad (14)$	$\frac{1}{1,9} \quad (15)$
$\frac{1}{1,9} \quad (16)$	$\frac{1}{1,9} \quad (17)$	$\frac{1}{1,9} \quad (18)$	$\frac{1}{1,9} \quad (19)$

$$(1 - \frac{1}{1,9})(1 + \frac{1}{1,9}) = 1 \quad (20)$$

$$1 - \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore 1 = \frac{2}{1,9} \therefore 1,9 = 2$$

$$1 = \frac{2}{1,9} \therefore 1,9 = 2$$

$$1 = \frac{2}{1,9} \therefore 1,9 = 2$$

ملاحظة

$$\frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9}$$

$$\frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9}$$

$$1 = 1 \quad (21)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{(1 - \frac{1}{1,9})}{1 - \frac{1}{1,9}} = 1$$

$$1 - \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore 1 = \frac{2}{1,9} \therefore 1,9 = 2$$

$$\frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9}$$

$$1 + 1,9 = 2 \quad (22)$$

$$(1 - \frac{1}{1,9}) \cdot 1,9 = 1,9 + 1,9 = 3,8 \therefore 1,9 = 1,9$$

$$1 = (1 - \frac{1}{1,9})(1 - \frac{1}{1,9}) \therefore 1 = 1,9 + 1,9 = 3,8$$

$$1 = 1,9 \therefore 1,9 = 1,9$$

$$(1 - \frac{1}{1,9})(1 - \frac{1}{1,9}) = 1,9 + 1,9 = 3,8$$

$$\frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9} \therefore \frac{1}{1,9} = \frac{1}{1,9}$$

$$1,919191919 = 1,9 \quad (23)$$

$$\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} =$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + 1) \cdot \frac{1}{1,2} =$$

$$\frac{1}{1,2} = 1,9 \therefore \frac{1}{1,2} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot \frac{1}{1,2} =$$

$$1,919191919 = 1,9 \quad (24)$$

$$\infty \dots + 1,0119 + 1,011 + 1,8 = 1,9$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + 1) \cdot 1,011 + 1,8 =$$

$$\frac{1}{1,8} = 1,9 \therefore \frac{1}{1,8} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,011 + 1,8 =$$

$$1,919191919 = 1,9 \quad (25)$$

$$\infty \dots + 1,0119 + 1,011 + 1,8 = 1,9$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + 1) \cdot 1,011 + 1,8 =$$

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,011 + 1,8 =$$

$$\frac{1}{1,8} = 1,9 \therefore \frac{1}{1,8} = \frac{1}{1,8} \cdot \frac{1,9}{1,9} + 1,8 =$$

$$1,919191919 = 1,9 \quad (26)$$

$$\infty \dots + 1,0119 + 1,011 + 1,9 =$$

$$\left(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + 1 \right) \cdot 1,9 =$$

$$\frac{1}{1,9} = 1,9 \therefore \frac{1}{1,9} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,9 =$$

$$1,919191919 = 1,9 \quad (27)$$

$$\infty \dots + 1,0119 + 1,011 + 1,9 =$$

$$(\infty \dots + \frac{1}{1,01} + \frac{1}{1,1} + 1) \cdot 1,9 =$$

$$\frac{1}{1,9} = 1,9 \therefore \frac{1}{1,9} = \left(\frac{1}{\frac{1}{1,01} - 1} \right) \cdot 1,9 =$$

$$[1 - \psi + (1 - \psi)^2] \frac{1}{2} \psi = (1 - \psi + \psi - \psi^2 + \psi^2 - \psi^3) \frac{1}{2} \psi = \frac{1}{2} \psi^2$$

$$(v) = \frac{(1-v)}{1} \cdot (v)^v(1) = v$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ direction}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{[3(\frac{1}{3})-1]}{\frac{1}{3}-1} = \frac{[4(\frac{1}{4})-1]}{\frac{1}{4}-1} = 2 \therefore$$

$$(r) \quad \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x)^2} = 2$$

$$(7) \quad \frac{1-u}{(1-u)^2 - u^2} = 2$$

$$u \left(\frac{(1-v)^{1-u}}{(1-v^u)} \right) = \frac{(1-v^u)^{1-u}}{1-v} = v \left(\frac{v}{1-v} \right)$$

$$(1-u)u_p u^p |_{\pi} u(1+u_p^p |_{\pi}) \pi$$

$$v_{\text{eff}} = v\left(\frac{1-u^2}{1-u^2}, u\right) = v\left(\frac{u}{1-u^2}\right) \therefore$$

⑤ لولا، انحصار $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ و $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{e}_3$

⑤ لَوْلَا، الصَّحَابَةُ عَجِبُوا مِنْ عَجَلِهِمْ وَنَجَلِهِمْ وَنَجَلِهِمْ وَنَجَلِهِمْ

الوسطان الهندسيان من Γ إلى Γ

١٨٨٧

$$(1) \quad \mathcal{A} = (x + 1)^2 u -$$

كذلك، الوسطان الحسنيين $\alpha + \beta$ و $\alpha - \beta$ هي - و

$$V \rightarrow U \oplus V \oplus U$$

$$2V = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi, \quad 2V = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \phi$$

$$\text{Equation (1)} \Rightarrow \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}^T + 1) \mathbf{u}$$

$$\frac{y_n}{y} = \frac{(y+1)y}{(1+y-\frac{1}{y})(y+1)y}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$x = (1 - y)(1 - y^2) \Rightarrow x = 1 - y - y^2 + y^3$$

7-11

Page	Time
------	------

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$$

1 = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 84

$$A_1 = 1 - 2^2 = 3 \text{ ج } 1 = 17 = 1 - 2^4 = 3 \text{ ج } 2$$

$$3 = 2^2 \text{ ج } 1 = 17 = 1 - 2^4 = 3 \text{ ج } 2$$

$$2 = 1 + 1 = 2$$

$$17 = 17 = \frac{17 \times 17 - 17}{17 - 1} = \frac{17 \times 17 - 17}{17 - 1} = 17$$

$$6A = \frac{1}{17 - 1} = 6A = \frac{1}{16} \text{ ج } 2$$

$$1 + (17 - 1) 6A = 17$$

$$17 = 17$$

$$17 = 17$$

$$17 + 17 = 17(17 - 1) 6A$$

$$1 = 17 - 17$$

$$1 = 1 + 17 - 17$$

$$1 = (17 - 17)(17 - 17)$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = 17 \text{ ج } 2$$

$$17 = u^5 \quad (1)$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 \times 0 = 17 = u$$

$$0 = u \quad \therefore \quad 0 = u$$

$$0 \times 7 \times 7 = u^5 \quad \therefore \quad 7 = u^5 \quad (2)$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 = u^5$$

$$7 + u = 7 + u \quad (3)$$

$$7 + u \mid (7 + u) = 7 + u \quad (4)$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 7 + u = 7$$

$$7 = u \mid (1 + u) \quad (5)$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 = 7 = 1 + u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 1 = 1 + u \quad \therefore \quad 1 = 1 + u$$

$$0 = \frac{u(1+u)(1+u)}{u} \quad \therefore \quad 0 = \frac{7+u}{u} \quad (6)$$

$$0 = (1+u)(7+u)$$

$$0 = 0 = u^2 + 7u$$

$$0 = 0 = 7 + u^2 + u$$

$$0 = (7-u)(7+u)$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 = u \quad (7)$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{u} \quad (8)$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{1}{u(1+u)} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{7+u}{1+u} \quad \therefore \quad \frac{7+u}{7} = \frac{1+1+u}{u(1+u)}$$

$$1 = 1 + u \quad \therefore \quad 1 \times 7 \times 7 \times 1 = 7 = 1 + u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 1 = 1 + u$$

$$(7 \times \text{الطرفين}) \quad 17 = 1 - u \mid u \quad (9)$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 = u \mid \quad 17 = 1 - u \mid u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 1 = u \quad \therefore \quad 1 = u \mid u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 \times 1 \times 0 = 7 = u \quad (10)$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 = 7 = u \quad \therefore \quad 7 = u$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 1 = u$$

$$1 = 1 \mid u \quad 7 = 1 \mid u = u$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 \times 0 = 17 = u \quad (11)$$

$$0 = u \quad \therefore \quad 0 = u$$

$$17 = u^5 \quad \therefore \quad 17 = u^5$$

$$0 = u \quad \therefore \quad 0 = u$$

$$0 = u^5 = 1 \times 7 \times 7 \times 1 \times 0 = u^5$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 1 = u = u - u = u - u$$

$$1 = u \quad (12)$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 1 = u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 = u$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 = u$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 1 = u$$

$$1 = u$$

$$17 = 7 - u \quad (13)$$

$$1 \times 7 \times 7 \times 1 \times 0 =$$

$$0 = 7 - u \quad \therefore \quad 0 = 7 - u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 = u$$

$$0 = \frac{u(1+u)}{u} \quad \therefore \quad 0 = \frac{1+u}{u} \quad (14)$$

$$17 = \frac{1-u \mid u(1+u)}{1-u} \quad \therefore \quad 17 = \frac{1+u}{1-u} \quad (15)$$

$$0 = (1-u)(7+u) \quad \therefore \quad 0 = 17 - u + u^2$$

$$7 = u^5 = 0 \times 0 \times 7 = u^5 \quad \therefore \quad 17 = u^5 \quad (16)$$

$$7 = u^5 = 7 \times 1 \times 1 \times 1 = u^5 \quad \therefore \quad 7 \times 7 = u^5 \quad (17)$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 7 \times 7 = u^5 \quad (18)$$

$$1 = u \quad \therefore \quad 7 = u^5$$

$$7 = u^5 = 7 \times 7 = u^5 \quad \therefore \quad 7 = u^5 \quad (19)$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 7 = 7 + u$$

$$1 = u^5 + u^5 \quad (20)$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 1 = u + 1$$

$$0 = u^5 + u^5 + u^5 \quad (21)$$

$$0 = (1-u)u + u + 1$$

$$0 = 17 - u^5 \quad \therefore \quad 0 = 0 - 1 + u - u^5 + u$$

$$7 = u \quad \therefore \quad 17 = u^5$$

$$[1] \Rightarrow 1-u \therefore \frac{1}{(1-u)} = \frac{1-u}{1} \quad (3)$$

$$1 = u \therefore 1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$[2] \Rightarrow 1-u \therefore \frac{1}{(1-u)} = \frac{1-u}{1} \quad (4)$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = \frac{1}{1-u} \therefore 1^{1+u} = 1 \quad (5)$$

$$1 = \frac{1}{1-u} + \frac{1+u}{1-u}$$

$$1 = \frac{1-u}{1-u} + \frac{1+u}{1-u}$$

$$1 = u \therefore 1 = 1+u \therefore 1 = \frac{1}{1-u}$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880 \quad (6)$$

$$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) = (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) =$$

$$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) \times (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) =$$

$$(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) \times 10 =$$

$$\frac{1}{1-u} < \frac{1}{1-u} \therefore 1^{1+u} < 1^{1+u} \quad (7)$$

$$\frac{1}{1-u} < \frac{1}{1-u}$$

$$1 < 1-u \therefore \frac{1}{1-u} < 1$$

$$1 = u \therefore 1 < u$$

$$u < 1 \therefore 1 = u^{1+u} + 1^{1+u} \quad (8)$$

$$1 = u^{1+u} \times 1 \therefore 1 = u^{1+u}$$

$$1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u}$$

$$1 = u \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u}$$

$$1 = u \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u}$$

$$1 = u \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u} \therefore 1 = u^{1+u}$$

$$\{1, 2\} \quad (9)$$

$$\frac{1}{1-u} \quad (10)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880 \quad (11)$$

$$1 = 1-u$$

$$1 = u \therefore 1 = 1-u$$

$$\{1\} = 1-2$$

$$1 = u^{1+u} + 1^{1+u} + 1^{1+u} \quad (12)$$

$$1 = (1-u)u + u + 1$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880 \quad (13)$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 362880 \quad (14)$$

$$(2) \Rightarrow 1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1^{1+u} \times 1^{1+u} = 1^{1+u} \quad (15)$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 = \frac{1}{1-u}$$

$$\frac{1}{1-u} \times 1 = \frac{1}{1-u} \times 1 = \frac{1}{1-u}$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

$$1 = 1-u \therefore 1 = 1-u$$

عدد الطرق $3! \times 1 = 6 \times 1 = 6$ طرق

عدد الطرق $11 \times 10 = 110$ طرق

عدد الطرق $23 \times 10 = 230$ طرق

عدد الطرق $12 = 3 \times 4 = 12$ طرق

$12 = \frac{3 \times 4}{2} \therefore 12 = 6$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$1 = 1$

$1 = 1$

$12 = \frac{3 \times 4}{2} \therefore 12 = 6$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$1 = 1$

$1 = 1$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$1 = 1$

$1 = 1$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$12 = 3 \times 4 = 12$

$0 = 0 - 1 + 1 + 1$

$1 = 1 - 0 + 1 + 1$

$\{V\} = \{1, 2, 3\}$

$1 = 1$

$1 = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2}$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$1+1+1 = 3$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$

$1 = 1$

$1 = 1$

$12 = \frac{(1-1) \times 1}{1} = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$12 = 1 - 1 = 0$

$$A = 1 \times 1 = VT = \gamma^2 u^2 + r$$

$$\gamma^2 u^2 = \gamma^2 u^2 + r$$

$$V = r \quad \leftarrow \quad 1 = r + r$$

$$r = \gamma^2 u^2 = r + u^2 \Rightarrow u = r u^2$$

$$\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2 = \gamma^2 u^2 \quad (1)$$

$$\frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} + \frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = r$$

$$\frac{1 + \gamma^2 - u}{1} + \frac{1}{1 + \gamma^2 - u} = r$$

$$\frac{1 - u}{1} + \frac{1}{1 - u} = r$$

$$(1 - u)(1 - u) + 1 \times 1 = (1 - u)r$$

$$1 - 2u + u^2 + 1 = 1 - u$$

$$1 = 2u + u^2 - 1$$

$$2 = (2 + u)(1 - u)$$

$$2 = u \quad \text{d} \quad 1 = u$$

$$\frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = \frac{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2} \quad (2)$$

$$\frac{r - 1}{1 + r} = \frac{1 + 1 - r - 1}{1 + r} = \frac{1 + (1 + r) - 1}{1 + r} =$$

$$\frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2} \quad (3)$$

$$\frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = \frac{1 + \frac{1 - r}{1}}{\frac{1}{1 + r} + 1} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{1 + \frac{1 - r}{1}}{\frac{1}{1 + r} + 1}$$

$$\frac{A}{11} = \frac{r^2 + r - \gamma^2}{1 + r^2} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{r^2 - (1 - r^2)r}{1 + r^2}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{r^2 + r}{1 + r^2} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{r^2 + r}{1 + r^2}$$

$$1 + r^2 = r^2 + r + r^2$$

$$1 = r + r^2 + r^2$$

$$1 = (1 + r)(1 + r^2)$$

$$(1 + r) \frac{1}{1} = r$$

$$r = r \quad \leftarrow \quad 1 = r$$

$$\frac{1 - u}{1 - \gamma^2 - u} = \frac{u}{1 - \gamma^2 - u} = \gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2 \quad (4)$$

$$\frac{u}{1 + r} = \frac{1 - \gamma^2 - u}{1 - u} = \frac{1 - u}{1 - \gamma^2 - u} \frac{u}{1 + r} =$$

$$1 - \gamma^2 - u \times 1 = \gamma^2 u^2 \times r \quad (5)$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{r} = \frac{\gamma^2 u^2}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1 - u}{1 - \gamma^2 - u} + \frac{u}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{r - u}{1 - u} = \frac{1 - u}{1 - \gamma^2 - u} \frac{u}{1 + r}$$

$$\gamma^2 u^2 = \frac{r}{1} = \frac{u}{1}$$

$$1 - \gamma^2 - u \times 1 = 1 - \gamma^2 - u = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1 - \gamma^2 - u}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{r - u}{1 - u} + \frac{1 - u}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{r - u}{1 - u} = \frac{r - u}{1 - \gamma^2 - u} \frac{1 - u}{1 + r}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1 - r}{1 - r} \quad \leftarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{1 - u}{1 - r}$$

$$1 - r = 1 - r$$

$$1 = u \quad \leftarrow \quad 0 = r$$

$$1 = 1 + 0 = r + u$$

$$1 - \gamma^2 u^2 > \gamma^2 u^2 \quad (6)$$

$$1 > \frac{1 + r - 1}{r} \quad \leftarrow \quad 1 > \frac{r^2 u^2}{1 - \gamma^2 u^2} \therefore$$

$$r > 1 + r - 1$$

$$\frac{11}{1} < r \therefore \quad 11 < r^2$$

$$1 \geq r^2 \quad \leftarrow \quad 1 \leq r$$

$$1 \geq r \geq 1$$

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 = r$$

$$1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = r + r + r + r + r$$

$$r = \frac{r^2 u^2}{1} = r + r + r \quad (7)$$

$$r = u \therefore \quad \gamma^2 u^2 = 1 + r + r = r + r$$

نظرياً أن عدد عناصر المجموعة $M = 2^n$

∴ عناصر M تمثل جميع الأزواج المترتبة من المجموعة M

∴ عدد عناصر $M = 2^n$

$$2^n = 2^n \quad \therefore 2^n = 2^n \quad \therefore 2^n = 2^n$$

∴ عناصر المجموعة M تمثل جميع المجموعات الجزئية

المتناهية من المجموعة M

$$2^n = 2^n = 2^n$$

$$\frac{u}{v|v-u} < \frac{u}{A|A-u} \quad \therefore \quad v|v-u < A|A-u \quad (29)$$

$$\frac{v|A-u}{v|A-u|v-u} < \frac{1}{v|A-u}$$

$$1 < v \dots \quad A < v-u \therefore \quad \frac{1}{v-u} < \frac{1}{A}$$

$$v < v \therefore \quad 1 < v^2 \quad (30)$$

$$v < v \therefore \quad 1 < v^2$$

$$v = v \therefore \quad v > v > 0$$

$$1 = \frac{v}{v} = \frac{v-v}{v-v} = \frac{v-v}{v-v}$$

$$v+u+v+u = v+u \quad \therefore \quad v+u \quad (31)$$

$$(v+u)(v+u) = \frac{(1-u)v}{1 \times 2} + \frac{(v-u)(1-u)v}{1 \times 2 \times 2}$$

$$(v+u)(v+u) = (1 + \frac{v-u}{2}) \frac{(1-u)v}{2}$$

$$(v+u)(v+u) = (\frac{2+v-u}{2}) \frac{(1-u)v}{2}$$

$$(v+u)(v+u) = \frac{(1+u)}{2} = \frac{(1-u)v}{2}$$

$$v+u-v-u-v-u \therefore \quad v+u-v = (1-u)v$$

$$v = (2+u)(1-u) \therefore \quad v = 2-u-v-u$$

$$v = 2-u-v-u \quad (مرفوض)$$

$$1:2 = v+u \therefore v+u \quad (32)$$

$$\frac{v}{1} = \frac{v+u}{v+u} = v+u$$

$$v = v \therefore \quad v = 1 \times v = v$$

$$v+u = v+u \therefore v+u$$

$$\frac{v}{2} = v+u \therefore v+u$$

$$\frac{v}{2} = \frac{v|v-u}{2} = \frac{v}{2|v-u}$$

$$\frac{v}{2} = \frac{v|v-u|v-u}{1} = \frac{1}{v|2|v-u}$$

$$v = u \therefore \quad v = 2-u \therefore \quad \frac{v}{2} = \frac{2-u}{2}$$

$$v+u-v-u+v+u \quad (33)$$

$$\frac{1-v|2|v-u}{1-u} = \frac{v}{v|2|v-u}$$

$$\frac{v}{v} = \frac{1-v|2|v-u}{1-u} = \frac{1-v|2|v-u}{1-v|2|v-u}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{م (2)} &= 4 - 4 + 4 \times 4 = 12 \\ \text{معدل التغير} &= \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{12 - 0}{3 - 0} = 4 \\ \text{معدل التغير} &= 4 \end{aligned}$$

١٩: مساحة سطح الكرة πr^2 هي

$$\begin{aligned} \text{معدل تغير مساحة السطح} &= \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} \\ &= \frac{\pi(4)^2 - \pi(2)^2}{4 - 2} = \frac{16\pi - 4\pi}{2} = 6\pi \\ \text{نهاية م} &= \pi(4)^2 = 16\pi \\ \text{نهاية س} &= 4 \\ \text{بداية م} &= \pi(2)^2 = 4\pi \\ \text{بداية س} &= 2 \\ \text{معدل التغير} &= \frac{16\pi - 4\pi}{4 - 2} = 6\pi \end{aligned}$$

٢٠: من المسألة السابقة م (1) $\pi(1) + \pi(2) = \pi(3)$

$$\pi(1) + \pi(2) = \pi(3)$$

عندما يزداد طول نصف القطر من 1 إلى 3،

$$\text{معدل التغير في المساحة} = \frac{\pi(3)^2 - \pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

٢١: د (س) = س

$$\begin{aligned} \text{م (د)} &= \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} \\ &= \frac{8 - 1}{4 - 1} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

معدل التغير = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{8 - 1}{4 - 1} = \frac{7}{3}$

٢٢: المساحة الكلية م = πr^2

متوسط التغير في المساحة الكلية

$$\begin{aligned} \text{م (د)} &= \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} \\ &= \frac{\pi(4)^2 - \pi(2)^2}{4 - 2} = \frac{16\pi - 4\pi}{2} = 6\pi \end{aligned}$$

وعندما س = 4، $\pi(4)^2 = 16\pi$

لأن م (د) = $\frac{\pi(4)^2 - \pi(2)^2}{4 - 2} = 6\pi$

معدل التغير في المساحة الكلية = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{16\pi - 4\pi}{4 - 2} = 6\pi$

٢٣: نفرض أن طول نصف قطر الكرة = س

حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi s^3$

$$\text{م (د)} = \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \frac{4}{3}\pi(1)^3}{3 - 1} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{104\pi}{6} = \frac{52\pi}{3}$$

د (س) = $\frac{4}{3}\pi s^3$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \frac{4}{3}\pi(1)^3}{3 - 1} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{104\pi}{6} = \frac{52\pi}{3}$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \frac{4}{3}\pi(1)^3}{3 - 1} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{104\pi}{6} = \frac{52\pi}{3}$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(3)^3 - \frac{4}{3}\pi(1)^3}{3 - 1} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{104\pi}{6} = \frac{52\pi}{3}$

معدل التغير = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{2} = \frac{104\pi}{6} = \frac{52\pi}{3}$

نهاية م = $\frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$

بداية م = $\frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi$

عندما طول نصف قطر الكرة = س = 3

معدل التغير = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{36\pi - \frac{4}{3}\pi}{3 - 1} = \frac{104\pi}{2} = 52\pi$

٢٤: نفرض أن طول نصف قطر الكرة = س

مساحة سطح الكرة = $4\pi s^2$

$$\text{م (د)} = \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$$

د (س) = $4\pi s^2$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi(3)^2 - 4\pi(1)^2}{3 - 1} = \frac{36\pi - 4\pi}{2} = 16\pi$

عندما يتغير طول نصف القطر من 1 إلى 3،

معدل التغير = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{36\pi - 4\pi}{3 - 1} = 16\pi$

م (د) = $\frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{36\pi - 4\pi}{3 - 1} = 16\pi$

حل آخر

د (س) = $4\pi s^2$

[illegible]

☐ فهرست از علول ضمیمه المربع ص ۳۳

$$+ \text{ (ج) } = (\text{ج} + \text{س}) - (\text{س}) = (\text{ج})$$

محبت ابن الحشر، ویتھمذ ای پڑھا

فصل دوم (۲) علمی-اشتیاقی

$$\frac{1}{x+y} \div x+y = (x+y)z$$

$$(u)_{\mathcal{A}} = (u + v)_{\mathcal{A}} = (u)_{\mathcal{A}}$$

$$\frac{1}{x} = x - \frac{1}{x+1} \Rightarrow x + \frac{1}{x+1} =$$

$$\frac{1 - s - s^2}{(1 + s)s} + s =$$

$$\frac{a}{(a+b)c} - a = (a) \cdot$$

$$\frac{\left(\frac{1}{(s+1)^2} - 1\right)s}{s} = \frac{(s)}{s} = (s)$$

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f\left(\frac{1}{1+h}\right) - f(1)}{\frac{1}{1+h} - 1} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{1+h}} - 1}{\frac{1}{1+h} - 1} = \frac{1+h - 1}{\frac{1}{1+h} - 1} = \frac{h}{\frac{1}{1+h} - 1}$$

$$1 + (a + b) - 1(a + b) = (a + b) \quad \text{⑤}$$

[illegible]

$$\{u\}_2 = \{u + v\}_2 = \{u\}_2$$

٢ (٧) $\frac{(1) - (8+1)}{8}$ (٨) معدل تغير الحالة (٩) معدل تغير الحالة

$$1 + s - s' = (s) \quad \square$$

$$1 + (a + b) - 1(a + b) = (a + b) \therefore$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$d(1-d+n-2) = (n)d - (d+n)d$$

$$\frac{1}{1-x+y} = (1-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-y)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} (-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$$

$$1 - \mu_T = (u - \mu)^2 \geq 0.$$

$$V = 1 + (V_-) - T(T_-) = (T_-)2 \therefore$$

٦. النقطة (٤١٧) أفع على نفسي و

مجلس المجلس عند النقطة (٧٤٧ - ٧٤٨)

$$u = 1 - (1 - \frac{1}{2})^t = (1 - \frac{1}{2})^t$$

$$1 + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \textcircled{4}$$

$$1 + {}^t(\mathcal{E} + \mathcal{S}) = (\mathcal{E} + \mathcal{S}) \cdot$$

$$d'(s) = \frac{d(s + \frac{1}{2})}{s} = \frac{d(s)}{s} + \frac{1}{2} \frac{d(s)}{s^2}$$

• اوپر (س. ۱۰) ۱ + ۲ - ۳ = ۰

٢٠٠٠ (١٠٠٠) ٢٠٠٠

[illegible]

معدل الخصائص = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

1 ② 1 ① 1 ④ 2 ③ 2 ① ②

۶۴ (۳۳) = ۳۳ + ۳۱ + ۳۰

$$3 \text{ (میں + تھ)} = 4 \text{ (میں + تھ)} + 5 \text{ (میں + تھ)} = 6 \text{ (میں + تھ)}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$$

[illegible]

$$P = \frac{1}{n} [x_1 + x_2 + \dots + x_n]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$(7) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (3) = (3)}^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{نقطة (3, 1) تقع على المحاور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 3} = \text{معدل التغير في د عند (س) = 3}$$

$$= \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+1)^2}{(3+1)^2} = \frac{1}{3}$$

$$(8) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحاور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \text{معدل التغير في د عند (س) = 1}$$

$$= \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$(9) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحاور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \text{معدل التغير في د عند (س) = 1}$$

$$= \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{(1+1)^2}{(1+1)^2} = \frac{1}{1}$$

$$(10) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحاور}$$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$x = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = Ax + A + Bx - B$$

$$x = (A+B)x + (A-B)$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=1 \end{cases}$$

$$2A=2 \Rightarrow A=1$$

$$1+B=1 \Rightarrow B=0$$

$$\therefore \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}$$

⑧ د (س) = $\frac{1}{x-1}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-2-x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\therefore \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

⑨ د (س) = $\frac{x}{x^2+1}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$

$$\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4} = \frac{x(x^2+4) - x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3+4x-x^3-x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4} = \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

⑩ د (س) = $\frac{x^2}{x^2-1}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2(x+2) - x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{x^2(x+2-x-1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{x^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

⑪ د (س) = $\frac{1}{x^2-1}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{x+2-x-1}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

⑫ د (س) = $\frac{1}{x^2-4}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1(x+3) - 1(x+2)}{(x-2)(x+2)(x+3)} = \frac{x+3-x-2}{(x-2)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)(x+3)}$$

⑬ د (س) = $\frac{1}{x^2-9}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{1(x+4) - 1(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+4)} = \frac{x+4-x-3}{(x-3)(x+3)(x+4)} = \frac{1}{(x-3)(x+3)(x+4)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{(x-3)(x+4)} = \frac{1}{(x-3)(x+3)(x+4)}$$

⑭ د (س) = $\frac{1}{x^2-16}$ \therefore د (س) د (س+1) = $\frac{1}{x^2-16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)}$

$$\frac{1}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{(x-4)(x+5)} = \frac{1(x+5) - 1(x+4)}{(x-4)(x+4)(x+5)} = \frac{x+5-x-4}{(x-4)(x+4)(x+5)} = \frac{1}{(x-4)(x+4)(x+5)}$$

$$\therefore \frac{1}{(x-4)(x+4)} - \frac{1}{(x-4)(x+5)} = \frac{1}{(x-4)(x+4)(x+5)}$$

$$= \frac{18 + 36 - 9 - 18}{(5 - 2)(5 + 2)} = \frac{27}{3 \cdot 7} = \frac{9}{7}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$= \frac{9}{7} = \frac{1}{\frac{7}{9}}$$

$$(4) \text{ مجال } x = 2 - x = 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2-x}$$

$$(5) \text{ مجال } x = 1 - x = 0$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

١٦) مجال $D = \mathbb{R}$ ∴ الدالة معرفة عند $x = 2$

$$D(2) = 2 - 2 = 0$$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+2)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

١٧) مجال $D = \mathbb{R}$ ∴ الدالة معرفة عند $x = 1$

$$D(1) = 1 - 1 = 0$$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+1)}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

١٨) مجال $D = \mathbb{R} - \{1\}$ ∴ الدالة غير معرفة عند $x = 1$

∴ الدالة غير متصلة عند $x = 1$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

١٩) مجال $D = \mathbb{R}$ ∴ الدالة معرفة عند $x = 1$

$$D(1) = 1 - 1 = 0$$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+1)}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

٢٠) $D(x) = |x - 2|$

$x = 2$ عندما $x < 2$

$x = 2 - x$ عندما $x > 2$

بحث الاتصال الدالة أولاً

$$D(2) = 2 - 2 = 0$$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+2)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

∴ الدالة متصلة عند $x = 2$

∴ الدالة معرفة عند $x = 2$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+2)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$

٢١) $D(x) = |x|$

$x = 0$ عندما $x < 0$

$x = -x$ عندما $x > 0$

بحث الاتصال أولاً عند $x = 0$

$$D(0) = 0 - 0 = 0$$

$$D'(x) = \frac{x^2 - (x+1)}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - x - 1}{x}$$

$$d(-x) = -dx = -d(x) = -1 \cdot dx = -dx$$

$$d(x^2) = 2x \cdot dx = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 \cdot dx = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 \cdot dx = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 \cdot dx = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 \cdot dx = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 \cdot dx = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 \cdot dx = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 \cdot dx = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 \cdot dx = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 dx$$

$$d(x^n) = n x^{n-1} dx$$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1$$

∴ النهاية غير قابلة للاختلاف عند $x=1$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1 \quad \therefore \text{دالة متصلة عند } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = (1+0) = 1$$

$$\frac{1}{1} = 1+1 \quad x=1 \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} > 1 \text{ عندما } x > 1 \\ \frac{1}{x} < 1 \text{ عندما } x < 1 \end{array} \right\} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1$$

∴ النهاية غير قابلة للاختلاف عند $x=1$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1 \quad \therefore \text{دالة متصلة عند } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = (1+0) = 1$$

$$\frac{1}{1} = 1+1 \quad x=1 \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} > 1 \text{ عندما } x > 1 \\ \frac{1}{x} < 1 \text{ عندما } x < 1 \end{array} \right\} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$A = 1(1) = (1)^d$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1$$

∴ النهاية غير قابلة للاختلاف عند $x=1$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1 \quad \therefore \text{دالة متصلة عند } x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = (1+0) = 1$$

∴ النهاية غير قابلة للاختلاف عند $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$1-1 = 0 \quad x=1 \dots$$

$$x=1 \dots$$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$11 = (1) = 1$$

$$11 = (1) = 1$$

$$11 = (1) = 1$$

$$11 = (1) = 1$$

$$11 = (1) = 1$$

$$(-1)^d = (+1)^d = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) د$$

بحث الاتصال عند $س = 1$: $ف = 1 + 1(1) = 2$ و $ف = 1 + 1(1) = 2$ و $ف = 1 + 1(1) = 2$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) د$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) د$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) د$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) د$$

بحث الاتصال عند $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

$$\textcircled{2} \text{ : سبل الماس عند } (س = 1) \text{ : } ف = 1$$

$$ف = 1 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$ف = 1 \quad \text{نهاية} \quad \text{من } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{3} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{4} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{5} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{6} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{7} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{8} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{9} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{10} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{11} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{12} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{13} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{14} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{15} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{16} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{17} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{18} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{19} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{20} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{21} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{22} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{23} \text{ : } 1 < 1$$

الالة متصلة عند $س = 1$

$$\textcircled{24} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{25} \text{ : } 1 < 1$$

$$\textcircled{26} \text{ : } 1 < 1$$

حل: الحالة ١: $x = 1$ الحالة ٢: $x = 2$

$$\begin{aligned} 11 &= A + 7(1) \Rightarrow 11 = A + 7 \Rightarrow A = 4 \\ \frac{11 - (A + 7)(1)}{1 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(1)}{1 - 1} = \frac{11 - 11}{0} = \frac{0}{0} \\ \frac{11 - (A + 7)(2)}{2 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(2)}{2 - 1} = \frac{11 - 18}{1} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(3)}{3 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(3)}{3 - 1} = \frac{11 - 25}{2} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(4)}{4 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(4)}{4 - 1} = \frac{11 - 32}{3} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(5)}{5 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(5)}{5 - 1} = \frac{11 - 40}{4} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(6)}{6 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(6)}{6 - 1} = \frac{11 - 46}{5} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(7)}{7 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(7)}{7 - 1} = \frac{11 - 53}{6} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(8)}{8 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(8)}{8 - 1} = \frac{11 - 60}{7} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(9)}{9 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(9)}{9 - 1} = \frac{11 - 67}{8} = -7 \\ \frac{11 - (A + 7)(10)}{10 - 1} &= \frac{11 - (4 + 7)(10)}{10 - 1} = \frac{11 - 74}{9} = -7 \end{aligned}$$

الحالة ٣: $x = 3$

تمرين (٣) على قواعد الاشتقاق

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

الحالة ٤: $x = 4$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

الحالة ٥: $x = 5$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

الحالة ٦: $x = 6$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

الحالة ٧: $x = 7$

الحالة ٨: $x = 8$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{d}{dx} x^2 = 2x \\ 2) \quad & \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \\ 3) \quad & \frac{d}{dx} x^4 = 4x^3 \\ 4) \quad & \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \\ 5) \quad & \frac{d}{dx} x^6 = 6x^5 \\ 6) \quad & \frac{d}{dx} x^7 = 7x^6 \\ 7) \quad & \frac{d}{dx} x^8 = 8x^7 \\ 8) \quad & \frac{d}{dx} x^9 = 9x^8 \\ 9) \quad & \frac{d}{dx} x^{10} = 10x^9 \\ 10) \quad & \frac{d}{dx} x^{11} = 11x^{10} \end{aligned}$$

$$1 = (-2)^0$$

$$(-2)^1 = \frac{1 - (-2)}{-1 - 0} = \frac{1 + 2}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$(-2)^2 = \frac{1 - (-2)}{-2 - (-1)} = \frac{1 + 2}{-2 + 1} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$(-2)^3 = -8$$

$$(-2)^4 = 16$$

∴ النسبة دالة غير الصفرية لا تتقارب عند $x = 1$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{1} \text{ صفر} \quad \textcircled{2} \text{ صفر} \quad \textcircled{3} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{4} \text{ صفر} \quad \textcircled{5} \text{ صفر} \quad \textcircled{6} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{7} \text{ صفر} \quad \textcircled{8} \text{ صفر} \quad \textcircled{9} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{10} \text{ صفر} \quad \textcircled{11} \text{ صفر} \quad \textcircled{12} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{1} \text{ صفر} \quad \textcircled{2} \text{ صفر} \quad \textcircled{3} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{4} \text{ صفر} \quad \textcircled{5} \text{ صفر} \quad \textcircled{6} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{7} \text{ صفر} \quad \textcircled{8} \text{ صفر} \quad \textcircled{9} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{10} \text{ صفر} \quad \textcircled{11} \text{ صفر} \quad \textcircled{12} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{13} \text{ صفر} \quad \textcircled{14} \text{ صفر} \quad \textcircled{15} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{16} \text{ صفر} \quad \textcircled{17} \text{ صفر} \quad \textcircled{18} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{19} \text{ صفر} \quad \textcircled{20} \text{ صفر} \quad \textcircled{21} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{22} \text{ صفر} \quad \textcircled{23} \text{ صفر} \quad \textcircled{24} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{25} \text{ صفر} \quad \textcircled{26} \text{ صفر} \quad \textcircled{27} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{28} \text{ صفر} \quad \textcircled{29} \text{ صفر} \quad \textcircled{30} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{31} \text{ صفر} \quad \textcircled{32} \text{ صفر} \quad \textcircled{33} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{34} \text{ صفر} \quad \textcircled{35} \text{ صفر} \quad \textcircled{36} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{37} \text{ صفر} \quad \textcircled{38} \text{ صفر} \quad \textcircled{39} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{40} \text{ صفر} \quad \textcircled{41} \text{ صفر} \quad \textcircled{42} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{43} \text{ صفر} \quad \textcircled{44} \text{ صفر} \quad \textcircled{45} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{46} \text{ صفر} \quad \textcircled{47} \text{ صفر} \quad \textcircled{48} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{49} \text{ صفر} \quad \textcircled{50} \text{ صفر} \quad \textcircled{51} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{52} \text{ صفر} \quad \textcircled{53} \text{ صفر} \quad \textcircled{54} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{55} \text{ صفر} \quad \textcircled{56} \text{ صفر} \quad \textcircled{57} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{58} \text{ صفر} \quad \textcircled{59} \text{ صفر} \quad \textcircled{60} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{61} \text{ صفر} \quad \textcircled{62} \text{ صفر} \quad \textcircled{63} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{64} \text{ صفر} \quad \textcircled{65} \text{ صفر} \quad \textcircled{66} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{67} \text{ صفر} \quad \textcircled{68} \text{ صفر} \quad \textcircled{69} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{70} \text{ صفر} \quad \textcircled{71} \text{ صفر} \quad \textcircled{72} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{73} \text{ صفر} \quad \textcircled{74} \text{ صفر} \quad \textcircled{75} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{76} \text{ صفر} \quad \textcircled{77} \text{ صفر} \quad \textcircled{78} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{79} \text{ صفر} \quad \textcircled{80} \text{ صفر} \quad \textcircled{81} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{82} \text{ صفر} \quad \textcircled{83} \text{ صفر} \quad \textcircled{84} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{85} \text{ صفر} \quad \textcircled{86} \text{ صفر} \quad \textcircled{87} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{88} \text{ صفر} \quad \textcircled{89} \text{ صفر} \quad \textcircled{90} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{91} \text{ صفر} \quad \textcircled{92} \text{ صفر} \quad \textcircled{93} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{94} \text{ صفر} \quad \textcircled{95} \text{ صفر} \quad \textcircled{96} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{97} \text{ صفر} \quad \textcircled{98} \text{ صفر} \quad \textcircled{99} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{100} \text{ صفر} \quad \textcircled{101} \text{ صفر} \quad \textcircled{102} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{103} \text{ صفر} \quad \textcircled{104} \text{ صفر} \quad \textcircled{105} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{106} \text{ صفر} \quad \textcircled{107} \text{ صفر} \quad \textcircled{108} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{109} \text{ صفر} \quad \textcircled{110} \text{ صفر} \quad \textcircled{111} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{112} \text{ صفر} \quad \textcircled{113} \text{ صفر} \quad \textcircled{114} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{115} \text{ صفر} \quad \textcircled{116} \text{ صفر} \quad \textcircled{117} \text{ صفر}$$

$$\textcircled{118} \text{ صفر} \quad \textcircled{119} \text{ صفر} \quad \textcircled{120} \text{ صفر}$$

$$(3) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{1}{\text{من}} = (1 + 1) = 2 \Rightarrow (1 - 1) = 0 \Rightarrow (2) \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 6 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 6 \text{ من } + 2 \text{ من } = 8 \text{ من}$$

$$(4) \frac{1}{\text{من}} = (2 + 1) (1 + 1) = 6 \Rightarrow (1 - 1) = 0 \Rightarrow 1 \times$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } + 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 8 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(5) \frac{1}{\text{من}} = (3 - 1) (2 + 1) = 4 \Rightarrow (1 - 1) = 0 \Rightarrow 1 \times$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(6) \frac{1}{\text{من}} = (2 + 1) (1 + 1) = 6 \Rightarrow (2 - 1) = 1 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(7) \frac{1}{\text{من}} = (2 + 1) (2 - 1) = 3 \Rightarrow (2 - 1) = 1 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(8) \text{ من } = (1 - 1) (2 + 1) = 0$$

$$\frac{1}{\text{من}} = (1 - 1) = 0 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = (2 - 1) (2 + 1) = 3 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(9) \text{ من } = (2 - 1) (2 + 1) = 3 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = (2 - 1) = 1 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(10) \text{ من } = (1 - 1) = 0$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من}$$

$$(11) \text{ من } = (2 - 1) (2 + 1) = 3 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = (2 - 1) = 1 \Rightarrow (2 + 1) = 3 \Rightarrow 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$= 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$\frac{1}{\text{من}} = 2 \text{ من } + 2 \text{ من } = 4 \text{ من}$$

$$(12) \frac{1}{\text{من}} = \frac{2 \times (2 + 1) - 1 \times (2 + 1)}{2 \times (2 + 1)}$$

$$= \frac{2}{2 \times (2 + 1)}$$

$$(13) \text{ من } = \frac{1 - 1}{2 + 1} = 0$$

$$\frac{2 \times (2 + 1) - 1 \times (2 + 1)}{2 \times (2 + 1)}$$

$$= \frac{2}{2 \times (2 + 1)}$$

$$(14) \text{ من } = \frac{2 \times (2 + 1) - 1 \times (2 + 1)}{2 \times (2 + 1)}$$

$$= \frac{2}{2 \times (2 + 1)}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{5x(2-5) - 5x(1+5)}{(1+5)^2} = \frac{10}{(1+5)^2}$$

$$\frac{10}{(1+5)^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3-5}{(3-5)^2} = \frac{(3-5)(3-5)}{(3-5)^2} = \frac{1}{(3-5)^2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{(1+5)(1+5) - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{0}{(1+5)^2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1 \times (2+5) - (1+5)(1+5)}{(2+5)^2} = \frac{1 \times 7 - 36}{(2+5)^2} = \frac{-29}{(2+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{0}{(2+5)^2}$$

$$\frac{1 \times 2 + 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{6}{(2+5)^2}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{(1+5)(1+5) - (2+5)(2+5)}{(1+5)^2} = \frac{16 - 49}{(1+5)^2} = \frac{-33}{(1+5)^2}$$

$$\frac{17 - 7}{(1+5)^2} = \frac{10}{(1+5)^2}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{(1-5)(1+5)}{(1+5)^2} = \frac{-4}{(1+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{0}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{2}{2+5} + \frac{2}{2+5} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{(2+5)(2+5) - (2+5)(2+5)}{(2+5)^2} = \frac{0}{(2+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{0}{(2+5)^2}$$

$$\frac{(1-5)(1+5) - (2+5)(2+5)}{(1-5)^2} = \frac{-33}{(1-5)^2}$$

$$\frac{1 \times 2 - 2 \times 2 + 2 \times 2 - 2 \times 2}{(1-5)^2} = \frac{0}{(1-5)^2}$$

$$\frac{1 \times 2 - 2 \times 2}{(1-5)^2} = \frac{-2}{(1-5)^2}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{(1+5)(1+5) - 1 \times 1}{(1+5)^2} = \frac{24}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{1-5}{(1+5)^2}$$

من 2

$$\frac{3-5}{(3-5)^2} = \frac{1+5}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$3-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{(1+5)(1+5) - 1 \times 1}{(1+5)^2} = \frac{24}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{1-5}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{1-5}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{1-5}{(1+5)^2}$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$1-5 = 1-5 = 9-5 = 4$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{7} \Rightarrow u + |v| = 7 \Rightarrow \frac{(u+1)-(u+1)}{1} = 7 \Rightarrow$$

$$\text{بحل } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ ينتج أن } u = 1 \text{ و } v = 6$$

$$\textcircled{17} \text{ من } (2+3) = (1+2) \Rightarrow 5 = 3$$

$$\frac{1+2}{1+2} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{2x(1+2) - 2x(1+2)}{(1+2)} = \frac{2x(1+2) - 2x(1+2)}{(1+2)}$$

$$\frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{(1+2)} \Rightarrow \frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{(1+2)}$$

$$\text{هنا } 1 = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{(1+1-1)} = \frac{1}{1}$$

$$\textcircled{21} \text{ من } \frac{1}{1+2} = \frac{1}{1+2} \Rightarrow \frac{1}{1+2} = \frac{1}{1+2}$$

$$(1) - 1 = 0 \Rightarrow u + |v| = 1$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\text{ميل المماس } A \text{ عند } 1 = 1$$

$$(1+1) \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A \Rightarrow \frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = A$$

$$\textcircled{7} \Rightarrow u + |v| = 7 \Rightarrow \frac{(u+1)-(u+1)}{1} = 7 \Rightarrow$$

$$\text{بحل } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ ينتج أن } u = 1 \text{ و } v = 6$$

$$\textcircled{17} \text{ من } (2+3) = (1+2) \Rightarrow 5 = 3$$

$$\frac{1+2}{1+2} = \frac{3}{3}$$

$$\frac{2x(1+2) - 2x(1+2)}{(1+2)} = \frac{2x(1+2) - 2x(1+2)}{(1+2)}$$

$$\frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{(1+2)} \Rightarrow \frac{1}{(1+2)} = \frac{1}{(1+2)}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{(1+1)-(1+1)}{(1+1)} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

بما أن (1) هي مشتقة دالة الفعالة

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$1 - 1 \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(2) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(3) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(4) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(5) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(6) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(7) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(8) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(9) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(10) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(11) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(12) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(13) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(14) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(15) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(16) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(17) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(18) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(19) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(20) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(21) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(22) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(23) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(24) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(25) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(26) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(27) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(28) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(29) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(30) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(31) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(32) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(33) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$(34) \text{ من } 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + 1^2 (3 - 2) + \dots$$

$$\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$(5) \text{ من } = \frac{2 \text{ طا من}}{1 - \text{طا من}}$$

$$\text{من} = \text{طا من} \quad \therefore \frac{2 \text{ طا من}}{1 - \text{طا من}} = \text{طا من}$$

$$(9) \text{ (1) من} = \text{نفا من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{\text{من} - \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{\text{طا من} - \text{نفا من}}{\text{طا من}}$$

$$(2) \text{ من} = \text{طا من} = \frac{\text{نفا من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{\text{من} - \text{طا من}}{\text{طا من}} = \frac{\text{نفا من} - \text{طا من}}{\text{طا من}} = \frac{1 - \text{طا من}}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}} - 1$$

$$(3) \text{ من} = \text{طا من} = \text{طا من}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ طا من} - \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{2 \text{ طا من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$2 \text{ طا من} - \text{نفا من} = \frac{2 \text{ طا من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$2 \text{ طا من} = \frac{2 \text{ طا من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}} + \text{نفا من} = \frac{2 \text{ طا من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}} + \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(4) \text{ من} = \text{طا من} = (1 - \text{من})$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{\text{طا من} - (1 - \text{من})}{1 - \text{من}} = \frac{2 \text{ طا من} - 1}{1 - \text{من}}$$

$$(5) \text{ من} = \text{طا من} = (1 - \text{من}) - \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{1 - \text{من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{1 - \text{من}} = \frac{1 - \text{من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{1 - \text{من}}$$

$$(6) \text{ من} = 2 \text{ طا من} - \frac{1}{\text{طا من}} - \text{نفا من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\text{من} = \frac{1}{\text{طا من}} - \text{نفا من} = \frac{1}{\text{طا من}} - \frac{1}{\text{طا من}} = 0$$

$$\frac{1}{\text{طا من}} - \frac{1}{\text{طا من}} = 0$$

$$(7) \text{ من} = \frac{\text{طا من}}{\text{طا من}} = \text{طا من}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ طا من}}{\text{طا من}}$$

$$(8) \text{ من} = \text{طا من} = \frac{\text{نفا من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{3 \text{ من} - \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{3 \text{ من} - \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$(9) \text{ من} = (1 + \text{من}) = \text{طا من}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ طا من} - 2 \text{ من} + (1 + \text{من})}{1 + \text{من}} = \frac{2 \text{ طا من} - 2 \text{ من} + 1 + \text{من}}{1 + \text{من}}$$

$$(10) \text{ من} = (1 + \text{من}) = \text{نفا من}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{3 \text{ من} - (1 + \text{من})}{1 + \text{من}} = \frac{2 \text{ من} - 1}{1 + \text{من}}$$

$$(11) \text{ من} = (1 + \text{من}) = (2 \text{ من} - \text{نفا من} - \text{طا من})$$

$$(12) \text{ (1) من} = 1$$

$$(2) \text{ من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(3) \text{ من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(4) \text{ من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(5) \text{ من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(6) \text{ من} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(13) \text{ (1) من} = 1$$

$$(2) \text{ من} = 1$$

$$(3) \text{ من} = 1$$

$$(4) \text{ من} = 1$$

$$(14) \text{ من} = \text{طا من} = \frac{\text{من}}{\text{من}} = 1$$

$$\text{طا من} = \frac{1}{\text{طا من}} = 1$$

$$\frac{1}{\text{طا من}} = 1 - (1 - \text{من}) = \text{من}$$

$$(15) \text{ من} = (2 \text{ من} + \text{نفا من})$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ من} + \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{2 \text{ من} + \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$(16) \frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ من} + \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{2 \text{ من} + \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$\text{من} = \frac{2 \text{ من} + \text{نفا من}}{\text{طا من}} = \frac{2 \text{ من} + \frac{1}{\text{طا من}}}{\text{طا من}}$$

$$(17) \frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{1}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\frac{1}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\text{من} = \frac{1}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(18) \frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{\text{نفا من} + 2 \text{ من}}{\text{طا من}} = \frac{\text{نفا من} + 2 \text{ من}}{\text{طا من}}$$

$$\text{طا من} = 0$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{1}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$(19) \text{ من} = \text{طا من} = (1 - \text{من})$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{\text{طا من} - (1 - \text{من})}{1 - \text{من}} = \frac{2 \text{ طا من} - 1}{1 - \text{من}}$$

$$\frac{1}{\text{طا من}} = \frac{1}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{2 \text{ من} - 1}{1 - \text{من}} = \frac{2 \text{ من} - 1}{1 - \text{من}}$$

$$(20) \text{ من} = (1 + \text{من}) = \frac{\text{طا من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{\text{من}}{\text{من}} = \frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}} = \frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}} = \frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}} = \frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}}$$

$$\frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}} = \frac{1 + \text{من}}{\text{طا من}}$$

$$(11) \text{ من } = \frac{2(1-x)}{2(1-x)} = 2-x$$

$$\therefore \text{ من } = \frac{2(1-x)}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1-x)}$$

$$2-x = \frac{1}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$2-x = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = (2-x)(1+x)$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = (2-x)(1+x) = (2-x)(1+x)$$

$$2-x = (2-x)(1+x)$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = 2-x = (2-x)(1+x)$$

$$(12) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = (2-x)(1+x) = (2-x)(1+x)$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = 2-x = 2-x$$

$$(13) \text{ من } = (2-x)(1+x) = (2-x)(1+x)$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$(14) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$(15) \text{ من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$(16) \text{ من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\frac{\text{وحي}}{\text{رس}} = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$\text{من } = \frac{2-x}{2(1-x)} = \frac{2-x}{2(1-x)}$$

$$(17) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$(18) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$(19) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$(20) \text{ من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

$$\text{من } = 2-x = 2-x$$

١) ١ - جا س - جتا س

٢) ١ - جا س - جتا س

٣) ١ - جا س - جتا س

٤) ١ - جا س - جتا س

٥) ١ - جا س - جتا س

٦) ١ - جا س - جتا س

٧) ١ - جا س - جتا س

٨) ١ - جا س - جتا س

٩) ١ - جا س - جتا س

١٠) ١ - جا س - جتا س

١١) ١ - جا س - جتا س

١٢) ١ - جا س - جتا س

١٣) ١ - جا س - جتا س

١٤) ١ - جا س - جتا س

١٥) ١ - جا س - جتا س

١٦) ١ - جا س - جتا س

١٧) ١ - جا س - جتا س

١٨) ١ - جا س - جتا س

١٩) ١ - جا س - جتا س

٢٠) ١ - جا س - جتا س

٢١) ١ - جا س - جتا س

٢٢) ١ - جا س - جتا س

٢٣) ١ - جا س - جتا س

٢٤) ١ - جا س - جتا س

٢٥) ١ - جا س - جتا س

٢٦) ١ - جا س - جتا س

٢٧) ١ - جا س - جتا س

٢٨) ١ - جا س - جتا س

٢٩) ١ - جا س - جتا س

٣٠) ١ - جا س - جتا س

٣١) ١ - جا س - جتا س

٣٢) ١ - جا س - جتا س

٣٣) ١ - جا س - جتا س

٣٤) ١ - جا س - جتا س

٣٥) ١ - جا س - جتا س

٣٦) ١ - جا س - جتا س

٣٧) ١ - جا س - جتا س

٣٨) ١ - جا س - جتا س

٣٩) ١ - جا س - جتا س

٤٠) ١ - جا س - جتا س

٤١) ١ - جا س - جتا س

٤٢) ١ - جا س - جتا س

٤٣) ١ - جا س - جتا س

٤٤) ١ - جا س - جتا س

٤٥) ١ - جا س - جتا س

٤٦) ١ - جا س - جتا س

٤٧) ١ - جا س - جتا س

٤٨) ١ - جا س - جتا س

٤٩) ١ - جا س - جتا س

٥٠) ١ - جا س - جتا س

٥١) ١ - جا س - جتا س

٥٢) ١ - جا س - جتا س

٥٣) ١ - جا س - جتا س

$$\textcircled{1} \text{ من } = \frac{3 \text{ من}}{2 \text{ من}}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{1K(3 \text{ من}) - 1K(2 \text{ من})}{1(2 \text{ من})}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من} - 2 \text{ من}}{1(2 \text{ من})} = \frac{1 \text{ من}}{2 \text{ من}}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من}}{2(2 \text{ من})} = \frac{3}{4} \text{ من}$$

$$\text{من} = \frac{3}{4} \times 100 = 75\%$$

$$\textcircled{2} \text{ من} = \text{من} (2 \text{ من}) - 1 \text{ من}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من} - 2 \text{ من}}{1 \text{ من}}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{1 \text{ من}}{1 \text{ من}} = 1$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\textcircled{3} \text{ من} = 2 \text{ من} + 3 \text{ من}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{2 \text{ من} + 3 \text{ من}}{2 \text{ من} + 3 \text{ من}}$$

$$\text{من} = \frac{5 \text{ من}}{5 \text{ من}} = 1$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{2 \text{ من} + 3 \text{ من}}{2 \text{ من} + 3 \text{ من}} = 1$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من}}{3 \text{ من}} = 1$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\textcircled{4} \text{ من} = 2 \text{ من} \text{ فما } 2 \text{ من} = \frac{2 \text{ من}}{2 \text{ من}} = 1$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{2 \text{ من}}{2 \text{ من}} = 1$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\textcircled{5} \text{ من} = 3 \text{ من} + 2 \text{ من} - 1 \text{ من}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من} + 2 \text{ من} - 1 \text{ من}}{3 \text{ من} + 2 \text{ من} - 1 \text{ من}}$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\text{من} = 1 \times 100 = 100\%$$

$$\textcircled{6} \text{ من} = 3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من}$$

$$\frac{\text{ومن}}{\text{ومن}} = \frac{3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من}}{3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من}}$$

$$\text{من} = 0 \times 100 = 0\%$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$\textcircled{7} \text{ من} = 3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من}$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$\textcircled{8} \text{ من} = 3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من}$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$3 \text{ من} - 2 \text{ من} - 1 \text{ من} = 0$$

$$(22) \text{ من } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 2 = 2 - 2$$

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{مماسل من}}{\text{مماسل من}} = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{ميل المماس} = \text{ميل المستقيم} \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{من } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$(23) \text{ من } \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 1 = 2 - 2$$

$$\text{المماس // المستقيم} \Rightarrow \text{ميل المماس} = \text{ميل المستقيم}$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{عندما } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{عندما } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (2, 2)$$

$$(24) \text{ من } \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 2 = 2 - 2$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{أما } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{أو } 1 = 2 - 2 \Rightarrow 1 = 2 - 2$$

$$\text{عندما } 2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{عندما } 2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (2, 2)$$

$$(25) \text{ من } 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 2 = 2 - 2$$

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{معادلة في الربع الثاني، الثالث}$$

$$\text{الربع الثاني: } 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{أو الربع الثالث: } 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (2, 2)$$

$$(26) \text{ من } 2 = 2 - 2$$

$$\frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\text{المماس // محور السينات} \Rightarrow \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\text{ط. موجبة في الربع الأول، الثالث}$$

$$\text{الربع الأول: } 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{الربع الثالث: } 2 = 2 - 2$$

$$\text{من } 2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (2, 2)$$

$$(27) \text{ من } 2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$2 = 2 - 2 \Rightarrow 2 = 2 - 2$$

$$\text{معادلة المماس عند } (2, 2)$$

$$(2 - 2) = (2 - 2) \Rightarrow (2 - 2) = (2 - 2)$$

$$\therefore \text{من } 4 = 3 - 8 = 13 \quad \therefore \text{من } 8 = 13 - 5$$

$$\text{أو من } 8 = 13 - 5 = 8$$

$$\textcircled{2} \text{ من } 5 = 1 - 6 = \frac{1}{5} \quad \therefore \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - 6 = 1$$

$$\left[\frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5} - (6) = -\frac{29}{5}$$

$$\text{معادلة المماس: } \frac{x}{5} = \left(-\frac{29}{5} \right) (y - 1)$$

$$x = 10 - 29y \quad \therefore 29y = 10 - x \quad \therefore y = \frac{10 - x}{29}$$

$$\textcircled{3} \text{ من } 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\text{و من } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - (2) = -\frac{3}{2}$$

$$(x - 1) = \left(-\frac{3}{2} \right) (y - 1) \quad \therefore 2(x - 1) = -3(y - 1)$$

$$\textcircled{1} \text{ من } 1 = (1 - 2) = -1$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (2) = -1 \quad \therefore x = -1$$

$$\left[\frac{1}{1} \right] = \frac{1}{1} - (2) = -1$$

$$(x - 1) = -1(y - 1) \quad \therefore x - 1 = -y + 1$$

$$x + y = 2 \quad \therefore x = 2 - y$$

$$\textcircled{2} \text{ من } 2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\text{عندما من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\text{وبالتعويض عن من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\text{من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\text{أي أن: النقطة } (1, 1) \text{ تقع على المنحنى}$$

$$\therefore \text{معادلة المماس عند النقطة } (1, 1) \text{ هي:}$$

$$\text{من } 1 = (1 - 1) = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\text{من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ من } 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - (1) = -\frac{1}{2}$$

$$(x - 1) = \left(-\frac{1}{2} \right) (y - 1)$$

$$\text{من } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$\text{من } 1 = 1 - 1 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1} - 1 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ من } 1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\left[\frac{1}{1} \right] = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1} - (1) = 0$$

معادلة العمودي:

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 3)$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 3)$$

$$2x - 2 = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$$

$$4x - 4 = y - 3$$

$$4x - y = 1$$

$$\frac{4x - y}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{4x - y}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$4x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

نقطة التقاطع مع محور السينات $y = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

$$x = \pm 1$$

لايجاد نقطة التقاطع

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

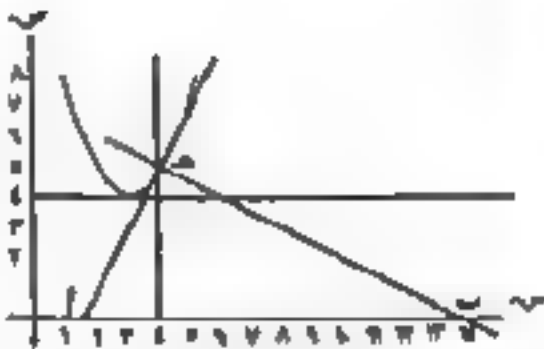
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



٢٩) من $(3 - x) = 4 + x^2$ $\therefore \frac{d}{dx} (3 - x) = \frac{d}{dx} (4 + x^2)$

١) لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع $x = 0$

$$4 = (3 - 0) + 0^2 \Rightarrow 4 = 3 + 0 \Rightarrow 1 \neq 4$$

$$\frac{d}{dx} (3 - x) = \frac{d}{dx} (4 + x^2) \Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

معادلة المماس هي:

$$(x - \frac{1}{2}) = 1(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow x - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

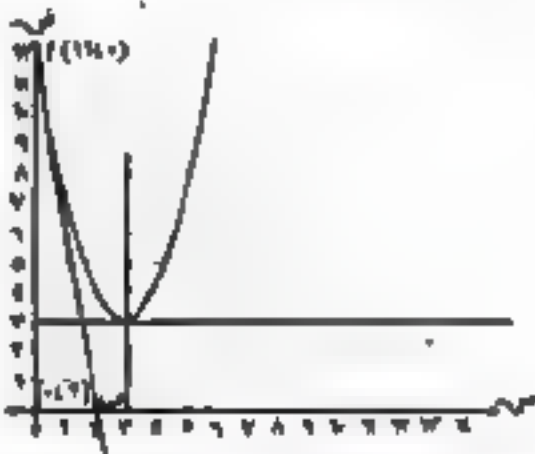
٢) لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع $y = 0$

$$0 = 4 + x^2 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$$

$$\therefore \text{نقطة التقاطع هي } (0, 4)$$

٣) مساحة Δ المطلوب هو مساحة Δ و AB

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72 \text{ وحدة مربعة}$$



٢٠) نفرض أن $(\frac{1}{x} + 1)$ $\therefore \frac{d}{dx} (\frac{1}{x} + 1) = \frac{d}{dx} (\frac{1}{x} + 1)$

$$\therefore \text{ميل المماس عند } (\frac{1}{x} + 1) \text{ يساوي } -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{معادلة المماس عند } x = 1 \text{ هي: } y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 3$$

$$\therefore \text{المضروب } \times 1 \Rightarrow 1 \times 1 = 1$$

من $3 = 2 + x^2$ $\therefore \frac{d}{dx} (3) = \frac{d}{dx} (2 + x^2)$

$$\frac{d}{dx} (3) = \frac{d}{dx} (2 + x^2) \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore \text{ميل المماس } = 0$$

$$\frac{d}{dx} (3) = \frac{d}{dx} (2 + x^2) \Rightarrow 0 = 2x \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore \text{ميل المماس } = 0$$

٢١) $1 = 1 = 1 = 1$ $\therefore \text{المماسان متطابقان}$

٢٢) من $x^3 = 3$ $\therefore \frac{d}{dx} (x^3) = \frac{d}{dx} (3)$

$$\text{معادلة المماس المار بالنقطة } (1, 1)$$

$$(x - 1) = 3(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 3x - 3 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$$

$$(x - 1) = 3(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 3x - 3 \Rightarrow 2 = 2x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{من } x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$\therefore \text{من } x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$x = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{من } x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$\therefore \text{من } x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$\text{من } x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (1, 1)$$

٢٣) من $x^2 = 2 + x^2$ $\therefore \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{d}{dx} (2 + x^2)$

$$\frac{d}{dx} (x^2) = \frac{d}{dx} (2 + x^2) \Rightarrow 2x = 2x \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{معادلة المماس هي: } (x - 1) = 2(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 1 = x$$

$$\text{من } x^2 = 2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع } y = 0$$

$$\frac{d}{dx} (x^2) = \frac{d}{dx} (2 + x^2) \Rightarrow 2x = 2x \Rightarrow 0 = 0$$

$$\text{معادلة المماس هي: } (x - 1) = 2(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 1 = x$$

$$\text{من } x^2 = 2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع } y = 0$$

$$\text{من } x^2 = 2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{النقطة } (1, 1)$$

$$\text{من } x^2 = 2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب هـ } = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72 \text{ وحدة مربعة}$$

∴ معادلة \vec{r} هي $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$

لايجاد نقطة تقاطع المستقيم \vec{r} مع محور السينات فإن $\vec{r} = 1$

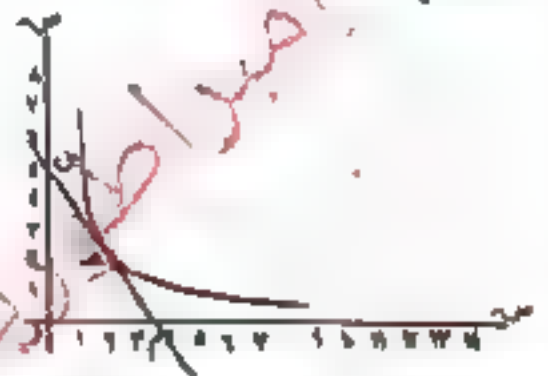
∴ $\vec{r} = 1$ أي أن $\vec{r} = 1$ من الوحدات

لايجاد نقط تقاطع المستقيم \vec{r} مع محور الصادات فإن $\vec{r} = 0$

∴ $\vec{r} = 0$ أي أن $\vec{r} = 0$ من الوحدات

∴ مساحة Δ \vec{r} و \vec{u} و \vec{v} $\Delta = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة

وهي كمية ثابتة لا تعتمد على إحداثي نقطة \vec{r} الواقعة على اللغني



(31) $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$ ∴ $\vec{r} = 1$ ∴ $\vec{r} = 1$

$$\frac{1}{1+2u+3v} = 1 \Rightarrow 1 = 1 + 2u + 3v$$

$$0 = 2u + 3v \Rightarrow 2u = -3v \Rightarrow u = -\frac{3}{2}v$$

$$1 = 1 + 2(-\frac{3}{2}v) + 3v = 1 - 3v + 3v = 1$$

$$\frac{1}{1+2u+3v} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-3v+3v} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1-3v+3v} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1-3v+3v} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1-3v+3v} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

$$1 = 1 + 2u + 3v \Rightarrow 0 = 2u + 3v$$

$$1 = 1 + 2u + 3v \Rightarrow 0 = 2u + 3v$$

$$1 = 1 + 2u + 3v \Rightarrow 0 = 2u + 3v$$

(32) النقطة $(1, 1)$ تقع على اللغني $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$

$$1 = 1 + 2u + 3v \Rightarrow 0 = 2u + 3v$$

$$1 = 1 + 2u + 3v \Rightarrow 0 = 2u + 3v$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$$

∴ المستقيم $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$ مماس للمنحني عند النقطة $(1, 1)$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

يحل المعادلتين (1) و (2) نجد أن $\vec{r} = 1$ و $\vec{u} = 0$ و $\vec{v} = 0$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

∴ اللغني $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$ مماس لمحور السينات عند $(1, 0)$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

∴ المستقيم $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$ مماس للمنحني عند $(1, 0)$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

بالتعويض في (1) عن \vec{u}

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

(33) $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$ ∴ $\vec{r} = 1$ ∴ $\vec{r} = 1$

∴ النقطة $(1, 1)$ تقع على اللغني $\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v}$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

(34) المسألة قابلة للاختزال

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

$$\vec{r} = 1 + 2\vec{u} + 3\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 1$$

معادلة التماس هي: $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$(37) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

نقطة التماس هي: $(3, 2)$ و $(2, 3)$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-3 = y-3 \Rightarrow x = y$$

$$x = y \Rightarrow x^2 + x^2 - 6x - 6x + 16 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (2, 2)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (4, 4)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (2, 4)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (4, 2)$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 + 7 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(38) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 + 7 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(39) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(40) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(41) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(42) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(43) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(44) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(45) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(46) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(47) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(48) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(49) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(50) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(51) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(52) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(53) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(54) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(55) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(56) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(57) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(58) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(59) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(60) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(61) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(62) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(63) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

$$(64) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 16 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$$

٥) في Δ ا ب د يكون $\frac{ا ب}{٢٠ م} = \frac{٩٠}{٢٥ م}$

ا ب = $\frac{٩٠}{٢٥ م} \times ٢٠ م = ٧٢ م$

في Δ ا ب د يكون

$\frac{ا ب}{٧٢ م} = \frac{٩٠}{٢٥ م}$

ا ب = $\frac{٩٠}{٢٥ م} \times ٧٢ م = ٢٦٠٠٩ م$

ا ب (ارتفاع التل) = ٢٧ متر

٦) في Δ ا ب د:

ا (ب د ا) = $٣٧'١٠$ و ا (ب د ا) = $٢٩'١٠$

$\frac{ا ب}{١١٦'١٠ م} = \frac{٨٥}{٢٩'١٠ م}$

ا ب = $\frac{٨٥}{٢٩'١٠ م} \times ١١٦'١٠ م$

ا ب = ١٧٣ متر

في Δ ب د ا:

ب د ا = $٥٣'٢٠$ و ا ب د = ١٣٧ متر

٧) في Δ ا ب د $\frac{ا ب}{٣٠ م} = \frac{١٠٠}{٦٠ م}$

ا ب = $\frac{١٠٠}{٦٠ م} \times ٣٠ م$

ا ب = ٥٧,٧ متر

علما بان (ب د ا) = ٤٥°

ا ب د = ١٠٠ متر

ب د ا (المسافة التي يجب قطعها) = $١٠٠ - ٥٧,٧ = ٤٢,٣$ متر

٨) ا ب = $٣٠ \times ٢ = ٦٠$ متر و ا (ب د ا) = ٢٥°

$\frac{ا ب}{٣٥ م} = \frac{١٠٠}{٢٥ م}$

ا ب = $\frac{١٠٠}{٢٥ م} \times ٣٥ م$

ا ب = ١٤٠ م

$\frac{١٤٠ م}{٢٥ م} = \frac{١٠٠}{٢٥ م}$

١٤٠ م = ٧٠ م

٩) في Δ ب د ا:

ا (ب د ا) = ٣٥°

$\frac{ا ب}{٣٥ م} = \frac{١٥}{٩٠ م}$

ا ب = $\frac{١٥}{٩٠ م} \times ٣٥ م$

ا ب = ٥,٨٣ م

١٠) ا ب = $\frac{٩٠ م}{٢٥ م} \times ٣٦ م$

في Δ ا ب د:

ا (ب د ا) = $٩٠^\circ - ٣٣^\circ = ٥٧^\circ$

ا (ب د ا) = $٥٧^\circ + ٣٣^\circ = ٩٠^\circ$

$\frac{٢٦,١٥}{٢٣ م} = \frac{ا ب}{١٠٢ م}$

ا ب = $\frac{١٠٢ م \times ٢٦,١٥}{٢٣ م}$

في Δ ا ب د:



ا (ب د ا) = $\frac{١٠٠}{٢٦}$

ا (ب د ا) = $٧٧'٢٦$

ا (ب د ا) = $٧٧'٢٦ - ٩٠ = ١٣'٢٦$

ا (ب د ا) = $١٣'٢٦ - ٣٣ = ١٣'٢٦$

ا ب = $\sqrt{(١٠٠)^2 + (١٣,٢٦)^2}$

ا ب = ١٠٢ متر

في Δ ا ب د:

$\frac{ا ب}{١٠٢ م} = \frac{١٠٠}{٢٦ م}$

ا ب = $\frac{١٠٠}{٢٦ م} \times ١٠٢ م$

ا ب = ٣٩٢,٣٧ م

ا ب = $\frac{٣٩٢,٣٧ م \times ١٠٢}{١٢٢'٢٧ م}$

ا ب = ٧٩ متر

في Δ ا ب د:



$\frac{ا ب}{١٠ م} = \frac{٣}{١١٠ م}$

ا ب = $\frac{٣}{١١٠ م} \times ١٠ م$

في Δ ا ب د:

ا ب = $٣٠ م \times ٨,١٢$

ا ب = ٢٤٣,٦ م

ا ب = $\frac{٢٤٣,٦ م}{٢٥ م} = ٩,٧٤ م$

ا ب = $\frac{٩,٧٤ م \times ٢٥ م}{٢٥ م}$

ا ب = ٢٤٣,٦ م

في Δ ا ب د:

ا ب = $\frac{٩٠ م}{٢٥ م} \times ٢٥ م$

ا ب = ٩٠ م

ا (ب د ا) = $٣٠^\circ + ١٥^\circ = ٤٥^\circ$

ا (ب د ا) = $٤٥^\circ + ١٥^\circ = ٦٠^\circ$

$$= (200)^2 + (100)^2 - 2 \times 200 \times 100 \cos 90^\circ$$

$$AB = 282.8 \text{ متر}$$



في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

الطول المبحر الأول

$$200 + 282.8 = 482.8 \text{ متر}$$

٢٨) يفرض أن θ هي قيمة المقادير



هـ قيمة الميقي

المقدرة المتعار

في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

ب هـ = 282.8 م



في ΔABC هـ

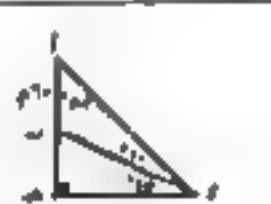
$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$



في ΔABC هـ

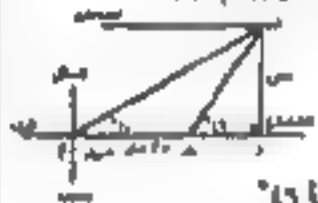
$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

$$= 200^2 + 100^2 - 2 \times 200 \times 100 \cos 90^\circ$$

$$AB = 282.8 \text{ متر}$$

٢٩) في ΔABC هـ



في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

٣٠) يفرض أن θ هو الهدف



ب مقدرة المحرك السفلية

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$



في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

٣١) في ΔABC هـ



في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

٣٢) بعد ساعتين تقطع السفينة الأولى مسافة ٩٩ كلم وتقطع



السفينة الثانية مسافة ٨٥ كلم

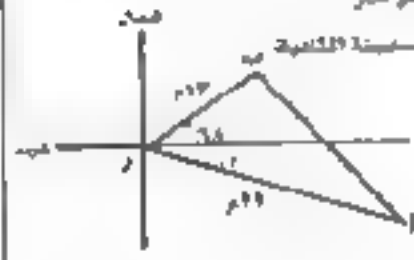
في ΔABC هـ

$$\frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$AB = \frac{200 \times \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 282.8$$

٢٦) المسافة التي قطعها المصطفي من المصطفي الثاني

بعد ساعتين = ٣٥ كيلو متر



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

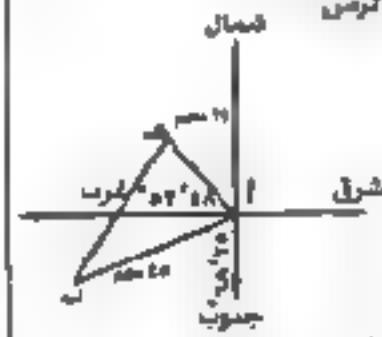
$$b^2 = 35^2 + 25^2 - 2 \times 35 \times 25 \times \cos 120^\circ$$

$$b^2 = 1225 + 625 + 875 = 2725$$

$$b = \sqrt{2725} = 52.19 \text{ كم}$$

وهي المسافة بين المصطفيين بعد ساعتين من لحظة انحرافهما معاً

٢٧) السرعة المتوسطة = المسافة المقطوعة / الزمن



المسافة المقطوعة = السرعة المتوسطة \times الزمن

$$b = a + c = 30 + 40 = 70 \text{ كم}$$

$$b = a + c = 30 + 40 = 70 \text{ كم}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = 30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 90^\circ$$

$$b^2 = 900 + 1600 - 0 = 2500$$

$$b = \sqrt{2500} = 50 \text{ كم}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$$

$$b = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 90^\circ}$$

$$b = 50 \text{ كم}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B}$$

$$b = \sqrt{30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 90^\circ}$$

$$b = 50 \text{ كم}$$

$$b = 50 \text{ كم}$$



في ΔAOB :
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
 $b^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos 120^\circ$
 $b^2 = 100 + 100 + 200 = 400$
 $b = \sqrt{400} = 20 \text{ كم}$



$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{20}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

$$a = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{20 \times 0.5}{0.866} = 11.55 \text{ كم}$$



يفرض أن ارتفاع المثلث هو h

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$b = 20 \text{ كم}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{20}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

$$a = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 11.55 \text{ كم}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{20}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

$$a = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 11.55 \text{ كم}$$

$$a = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 11.55 \text{ كم}$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$b = 20 \text{ كم}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\frac{20}{\sin 120^\circ} = \frac{a}{\sin 30^\circ}$$

$$a = \frac{20 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 11.55 \text{ كم}$$



$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{100}{\sin 109^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 12^\circ}{\sin 109^\circ} = 28.11 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$AC = \frac{28.11 \times \sin 109^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25 \text{ متر}$$



$$\text{في } \Delta ABC$$

$$\angle C = 180^\circ - 109^\circ - 12^\circ = 59^\circ$$

$$\angle C = 59^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 109^\circ - 59^\circ = 12^\circ$$

$$\angle B = 12^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{BC}{\sin 59^\circ}$$

$$BC = \frac{28.11 \times \sin 59^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25 \text{ متر}$$

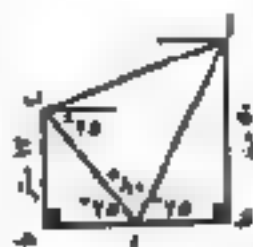
$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\angle C = 59^\circ$$

$$\angle C = 59^\circ$$

$$\angle B = 12^\circ$$

21) بفرض أن قمة البرج ب تقع على التل



$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$AC = \frac{28.11 \times \sin 109^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

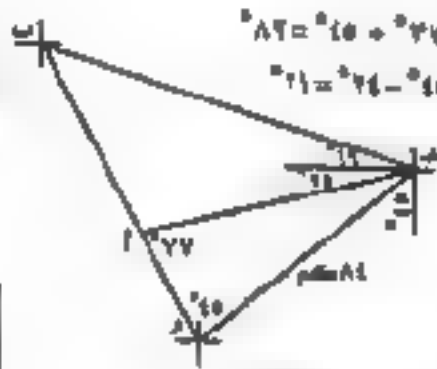
22) وحدة المسافة التي تحركتها السفينة خلال 3 ساعات

$$AB = 28 \times 3 = 84 \text{ كم}$$

في \Delta ABC

$$\angle C = 180^\circ - 109^\circ - 12^\circ = 59^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 109^\circ - 59^\circ = 12^\circ$$



$$\angle C = 59^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

في \Delta ABC

$$\angle C = 180^\circ - 109^\circ - 12^\circ = 59^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 109^\circ - 59^\circ = 12^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

23) بفرض أن التل ب وأن ه تقع على التل

$$\angle C = 180^\circ - 109^\circ - 12^\circ = 59^\circ$$

$$\angle B = 180^\circ - 109^\circ - 59^\circ = 12^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

المسافة بين البرجين = 5.8 + 1.4 = 7.2 متر

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10.7^2 + 13.1^2} = 17.3 \text{ متر}$$

بفرض أن النقطتين المائتين هما ب و ج، وبداية حرجية (المسافة)

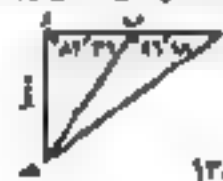
$$\begin{aligned} \angle C &= \angle A + \angle B = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ \\ \angle A &= \angle C - \angle B = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ \\ \angle B &= \angle C - \angle A = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 70^\circ} &= \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \\ AB &= \frac{10.7 \times \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} = 17.3 \text{ متر} \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

بفرض أن المسافة هو ج، وموقع الطائرة هي الضيقين (أ)



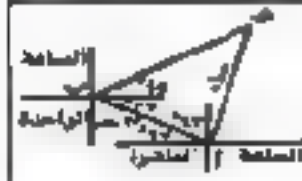
$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 70^\circ} &= \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \\ AB &= \frac{10.7 \times \sin 70^\circ}{\sin 40^\circ} = 17.3 \text{ متر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle C &= \angle A + \angle B = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ \\ \angle A &= \angle C - \angle B = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ \\ \angle B &= \angle C - \angle A = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = 17.3 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

بفرض أن موقع السفينة عند الساعة العاشرة هو أ وموقعها الساعة الواحدة هو ب وموقع الفئرو هو ج بمقدار ساعات



تسجل المسافة المسجلة = 20 = 3 + 17 = 20 متر

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10.7^2 + 13.1^2} = 17.3 \text{ متر}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10.7^2 + 13.1^2} = 17.3 \text{ متر}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{10.7^2 + 13.1^2} = 17.3 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = 17.3 \text{ متر}$$

بفرض أن طول السلم = 1.4 متر



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

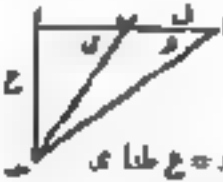
$$\frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = 17.3 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

بفرض أن الاتجاه هو ج



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = 17.3 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

(معايير (2)) على السؤال الثانية لوضع أو فترة القياس (الوقت)

$$\angle C = \angle A + \angle B = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$$



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{10.7}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = 17.3 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 70^\circ} = \frac{13.1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow AB = 26.2 \text{ متر}$$

④ إيجاد ظل $(\alpha + \beta)$ توجد أولاً ظل $(\alpha + \beta)$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\frac{4}{13} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} - 1} =$$

$$\frac{37}{48} = \tan (\alpha + \beta) \therefore$$

⑤ هنا $\frac{4}{5} = \alpha$ ، هنا $\frac{1}{3} = \beta$

$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} =$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

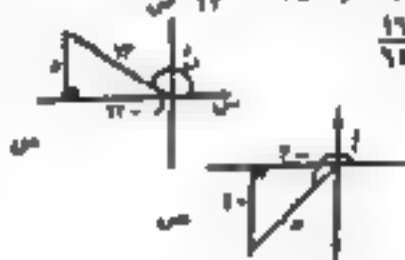
$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{7}{5} =$$

$$\frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} =$$

⑥ هنا $(\alpha - \beta) = \alpha + \beta$ هنا $\alpha + \beta$

$$\frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{3} - \right) + \left(\frac{11}{13} - \right) \times \left(\frac{4}{5} - \right) =$$

$$\frac{13}{15} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} =$$



$$\frac{4}{5} = \alpha \text{ هنا } \frac{1}{3} = \beta \text{ هنا } \frac{4}{5} = \alpha \text{ هنا } \frac{1}{3} = \beta$$

$$1 = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{5} =$$

$$\frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\therefore \alpha + \beta \text{ تقع في الربع الثالث}$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \alpha + \beta = 10 + 18 = \alpha + \beta$$

$$1 = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$1 = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 10$$

⑦ لإيجاد التاني $\frac{4}{5} = \alpha$ هنا $\frac{1}{3} = \beta$

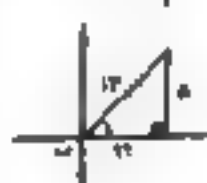


$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} =$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$



$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} = \frac{12}{15} - \frac{5}{15} - \frac{4}{15} =$$

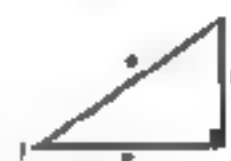
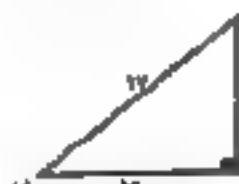
$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \tan (\alpha - \beta) \text{ هنا } \alpha - \beta = \alpha - \beta$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} =$$

$$\frac{12}{15} - \frac{5}{15} - \frac{4}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \tan (\alpha - \beta)$$

⑧ $\alpha + \beta$ تقعان في الربع الأول



$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{5} =$$

$$\frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{5} =$$

$$\frac{12}{15} + \frac{5}{15} + \frac{4}{15} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5} =$$

$$\frac{12}{15} - \frac{5}{15} - \frac{4}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \tan (\alpha - \beta) \text{ هنا } \alpha - \beta = \alpha - \beta$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$\frac{21}{15} = \frac{7}{5} = \tan (\alpha + \beta) \text{ هنا } \alpha + \beta = \alpha + \beta$$

$$90 = \text{س} + \text{ب} + 1 \quad (1)$$

$$\text{س} = 90 - (\text{ب} + 1)$$

$$\text{طفا س} = \text{طفا} [90 - (\text{ب} + 1)]$$

$$\frac{77}{18} = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} - 1} = \frac{\text{طفا} + 1}{\text{طفا} - 1} = (\text{ب} + 1) \text{طفا} =$$

$$9 = \sqrt{1 + 17} = 4 \quad (2)$$

$$10 = \sqrt{18 - 17} = 1$$

$$(\text{ب} + 1) \text{طفا} + (\text{ب} + 1) \text{طفا} = (\text{ب} + 1) \text{طفا}$$

$$\alpha + \theta = \text{س}$$

$$\alpha \text{ ما س} = \text{ما} (\alpha + \theta) = \alpha \text{ ما} \theta \text{ ما} + \alpha \text{ ما} \theta \text{ ما}$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\sqrt{9} = \sqrt{1 + 17} = 4$$

$$10 = \sqrt{18 - 17} = 1$$

$$(\text{ب} + 1) \text{طفا} + (\text{ب} + 1) \text{طفا} = (\text{ب} + 1) \text{طفا}$$

$$[(\text{ب} + 1) \text{طفا} - 90] + [(\text{ب} + 1) \text{طفا} - 90] =$$

$$(\text{ب} + 1) \text{طفا} + (\text{ب} + 1) \text{طفا} =$$

$$\text{س} = 90$$

$$\text{ما س} = \text{ما} (90 - 1)$$

$$\text{ما} \alpha \text{ ما} + \text{ما} \theta \text{ ما} =$$

$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

(10)

بفرض ان طول ضلع المربع = 1

$$\sqrt{9} = \sqrt{1 + 17} = 4$$

$$10 = \text{س} + \theta$$

$$10 = \theta - \text{س}$$

$$\theta = \text{طفا} (10 - \text{س})$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{\text{طفا س} - 10 \text{ طفا}}{10 \text{ طفا} + 1}$$

$$\frac{1}{9} = \text{طفا} 10 \quad (11)$$

$$10 = \text{طفا} 10 \quad (12)$$

$$\frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{10 \text{ طفا} - 10 \text{ طفا}}{10 \text{ طفا} + 1}$$

(13)



نرمس ب

يقطع آله ب

بفرض ان ضلع المربع = 1

$$(\text{ب} + 1) \text{طفا} + (\text{ب} + 1) \text{طفا} = (\text{ب} + 1) \text{طفا}$$

$$[(\text{ب} + 1) \text{طفا} - 90] + [(\text{ب} + 1) \text{طفا} - 90] =$$

$$(\text{ب} + 1) \text{طفا} + (\text{ب} + 1) \text{طفا} =$$

$$\text{س} = 90$$

$$\text{ما س} = \text{ما} (90 - 1)$$



$$\frac{77}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{9} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{9} =$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \quad \frac{27 \text{ م.}^3}{\text{م.}} = 27 \text{ م.}^2$$

$$\frac{27 \text{ م.}^3}{\text{م.}} = 27 \text{ م.}^2$$

$$\textcircled{2} \quad \text{مجموع} = 11,7 \text{ م.} \quad 27 = 27$$

$$\text{م.}^2 = \frac{(11,7) \times (11,7)}{4,8} = 27 \text{ م.}^2$$

$$\textcircled{1} \textcircled{2} \quad \text{م.}^2 = 27 \text{ م.}^2 \quad 27 = 27$$

$$\frac{1-27}{9} = 1 - \frac{27}{9} = 1 - 3 = -2$$

$$\textcircled{2} \quad 1 = 1 + 1 = 2$$

$$1 = 1 + 1 = 2$$

$$1 = 1 + 1 = 2$$

$$1 = 1 + 1 = 2$$

$$1 = 1 + 1 = 2$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$2 \text{ م.}^2 = 2 \text{ م.}^2$$

$$2 \text{ م.}^2 = 2 \text{ م.}^2$$

$$2 \text{ م.}^2 = 2 \text{ م.}^2$$

$$2 \text{ م.}^2 = 2 \text{ م.}^2$$



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{م.}^2 = 27 \text{ م.}^2 \quad \text{م.}^2 = 27 \text{ م.}^2$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$1 = 1$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{1} = \frac{2 \times 2}{1 \times 2} = \frac{4}{2}$$

$$1 = 1$$

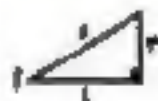
$$2 = 1 \quad (1)$$

$$2 = 1 \quad (2)$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

(3) تقع في الربع الأول



$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2 \times \frac{2}{1} = 4$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$(20 + 20) = 40$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$(20 + 20) = 40$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

$$20 \times 20 = 400$$

(4) بتوحيد المقامات

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{2}{1} = 2$$



في Δ ا ب ج

$$8 + 3 = 11$$

$$11 = 11$$

$$9 = 9$$

$$S_{\Delta} = \frac{(8-3)(11-3)(3-3)}{2} = 0$$

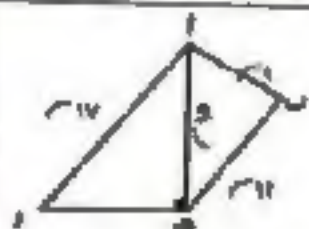
في Δ ا ب ج

$$11 = 11$$

$$S_{\Delta} = \frac{(11-3)(11-3)(3-3)}{2} = 0$$

مساحة الشكل الرباعي ا ب ج د = مساحة Δ ا ب ج + مساحة Δ ا ب د

$$S_{\Delta} = 9 + 0 = 9$$



في Δ ا ب ج

$$10 + 8 = 18$$

$$18 = 18$$

مساحة Δ ا ب ج

$$S_{\Delta} = \frac{(10-8)(18-8)(8-8)}{2} = 0$$

في Δ ا ب ج

$$S_{\Delta} = \frac{(18-8)(18-8)(8-8)}{2} = 0$$

$$S_{\Delta} = 18 \times 4 \times \frac{1}{2} = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

في Δ ا ب ج

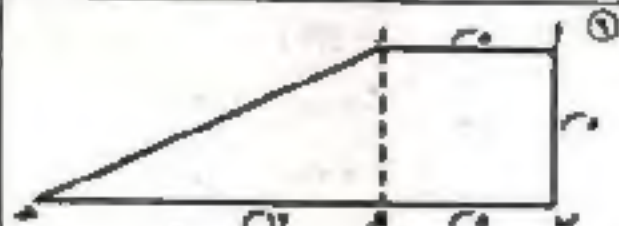
$$18 = 18$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$

$$S_{\Delta} = 9 + 27 = 36$$



في Δ ا ب ج

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$S_{\Delta} = 9$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(10-12)(8-12)(12-12)}{2} = 0$$

12 = ج

$$12 = ج \therefore 78 = 8 + 10 + 10 = ج 7$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(8-12)(12-12)(12-12)}{2} = 0$$

$$\text{مساحة الشكل} = 78 + 0 + 0 = 78$$

1. الشكل ا ب هـ مربع

مساحة المربع ا ب هـ

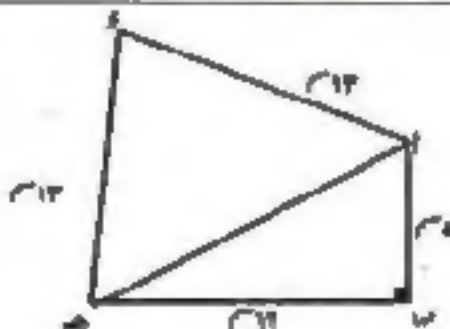
$$78 = 8 \times 8 =$$

$$12 = 8 - 12 = 8$$

مساحة \Delta ا ب هـ

$$78 = 12 \times 8 \times \frac{1}{2} =$$

$$78 = 78 + 0 = 78$$

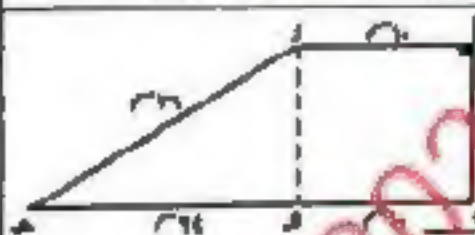


$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{12 \times 8}{2} = 48$$

$$12 = 12 + 12 = 24$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{12 \times 12}{2} = 72$$

$$\text{مساحة الشكل ا ب هـ} = 72 + 0 + 0 = 72$$



نسطح د ق د ب

1. الشكل ا ب هـ والمربع

$$10 = 8 + 10 = 18$$

$$78 = 10 - 18 = 60$$

$$78 = 10 \times 10 = 100$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{12 \times 8}{2} = 48$$

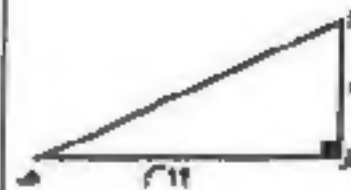
$$\text{مساحة الشكل} = 48 + 10 = 58$$

$$11 = \frac{8-12}{2} = 2$$

$$10 = ج \therefore 78 = 8 + 10 + 10 = ج 7$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(8-10)(10-10)(10-10)}{2} = 0$$

$$78 =$$



2. الشكل ا ب هـ مستطيل

1. الشكل ا ب هـ مستطيل

$$78 = 8 = 8$$

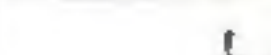
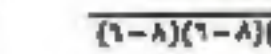
مساحة المستطيل ا ب هـ

$$78 = 8 \times 8 =$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{12 \times 8}{2} = 48$$

$$78 = 12 + 8 = 20$$

$$\text{مساحة الشكل} = 12 + 8 = 20$$



٦) نفرض أن الأطوال هي: $ك ٧$ ، $ك ٥$ ، $ك ٣$

محيط الحديقة = ٢٠٠

$$٢٠٠ = ك ٧ + ك ٥ + ك ٣$$

$$٢٠٠ = ك ١٥ \quad \therefore ك = ١٣٣$$

الأطوال هي: ١٤٠ ، ١٠٠ ، ٦٠

$$مساحة الحديقة = \frac{(١٤٠ - ١٠٠)(١٠٠ - ٦٠)(٦٠ - ١٤٠)}{٢} = ٢٥٩٨$$

$$= ٢٥٩٨ \text{ متر}^2$$

٧) نفرض أن الأطوال هي:

$$٢٢ \text{ سم} ، ١٦ \text{ سم} ، ١٤ \text{ سم} ، ١٢ \text{ سم} ، ١٠ \text{ سم} ، ٨ \text{ سم}$$

$$٢٢ = ١٦ + ١٤ + ١٢ + ١٠ + ٨$$

$$٢٢ = ١٦ \quad \therefore ٢ = ١٦$$

الأطوال هي:

$$٨ \text{ سم} ، ١٦ \text{ سم} ، ١٤ \text{ سم} ، ١٢ \text{ سم} ، ١٠ \text{ سم} ، ٨ \text{ سم}$$

نصل ٢ هـ



$$مساحة المستطيل | ب هـ = ٨ \times ١٦ = ١٢٨$$

Δ هـ د هـ:

$$٢٢ = ٨ + ١٦ + ١٤ = ٣٨$$

$$مساحة \Delta \text{ هـ د هـ} = \frac{(٣٨ - ٨)(١٦ - ٨)(١٤ - ٨)}{٢} = ١١٢$$

$$= ١١٢$$

$$مساحة الشكل = ١١٢ + ١٢٨ = ٢٤٠$$